

Universidade Federal do Espírito Santo

Departamento de Física

Programa de Pós-Graduação em Física

Nível Doutorado

**Raphael Fracalossi**

**Modelos cosmológicos quânticos com  
fluido de matéria rígida e outros  
graus de liberdade**

Vitória

2018

Raphael Fracalossi

# Modelos cosmológicos quânticos com fluido de matéria rígida e outros graus de liberdade

Tese apresentada como requisito parcial para  
a obtenção do título de Doutor em Física,  
pelo Programa de Pós-Graduação em Física  
da Universidade Federal do Espírito Santo

Orientador: Dr. Sergio V. B. Gonçalves

Coorientador: Dr. Flávio G. Alvarenga

Vitória

2018

Modelo de ficha catalográfica fornecido pelo Sistema Integrado de  
Bibliotecas da Ufes para ser confeccionada pelo autor

---

F797m      Fracalossi, Raphael, 1982-  
Modelos cosmológicos quânticos com fluido de matéria rígida  
e outros graus de liberdade. / Raphael Fracalossi. - 2018.  
96 f.

Orientador: Sergio Vitorino de Borba Gonçalves.  
Coorientador: Flávio Gomenes Alvarenga.  
Tese (Doutorado em Física) - Universidade Federal do  
Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Cosmologia quântica. 2. Formalismo de Schutz. 3. matéria  
rígida. 4. Kantowski-Sachs. I. Gonçalves, Sergio Vitorino de  
Borba. II. Alvarenga, Flávio Gomenes. III. Universidade  
Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. IV. Título.

CDU: 53

---



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

## **“Modelos cosmológicos quânticos com fluido de matéria rígida e outros graus de liberdade”**

**Raphael Fracalossi**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Aprovada por:

Prof. Dr. Nivaldo Agostinho Lemos  
(UFF/RJ)

Prof. Dr. Sergio Vitorino de B. Gonçalves  
(Orientador - PPGFis/UFES)

Prof. Dr. José André Lourenço  
(CEUNES)

Prof. Dr. Flávio Gimenes Alvarenga  
(Coorientador-UFES)

Prof. Dr. Clisthenis Ponce Constantinidis  
(PPGFis/UFES)

Vitória-ES, 25 de outubro de 2018

*À Valeska, minha esposa, fonte inesgotável de inspiração.*

# Agradecimentos

Em primeiro lugar, sempre, agradeço a Deus por insistir em não permitir que a chama da minha esperança se apague.

A minha mãe Berenice, meu exemplo maior, a quem associo e continuarei associando sempre todas as minhas conquistas, minha eterna gratidão. Jamais serei capaz de agradecê-la o suficiente...

Agradeço a minha esposa Valeska por seu sorriso luminoso e por ser a fonte da inspiração que ainda me faltava.

Aos professores Sergio Vitorino e Flávio Gimenes, meus mais sinceros agradecimentos por se preocuparem com minha formação, por sempre acreditarem em mim e me incentivarem, mesmo nos momentos mais complicados de minha vida acadêmica.

Agradeço aos meus muitos e sinceros amigos, os quais me motivam e estão sempre prontos para me socorrer nos momentos difíceis e sorrir comigo nos momentos felizes.

Meus agradecimentos aos professores Nivaldo Agostinho Lemos, Clisthenis Ponce Constantinidis e José André Lourenço por participarem de minha banca e por suas valiosas sugestões.

Finalmente, agradeço aos meus alunos que, com entusiasmo, atentam-se ao que leciono e justificam todo meu esforço em entender a natureza.

*“Estai sempre prontos a responder para vossa defesa a todo aquele que vos pedir a razão de vossa esperança, mas fazei-o com suavidade e respeito.”*

*(I São Pedro, 3)*

## Resumo

Neste trabalho, modelos cosmológicos quânticos com fluido perfeito são estudados de acordo com a abordagem canônica da Cosmologia Quântica. O conteúdo material do Universo é descrito pelo formalismo de Schutz, o qual é detalhadamente discutido e utilizado como ferramenta a fim de resolver o problema da ausência da variável tempo na teoria. Neste contexto, são construídos dois modelos nos quais encontra-se fluido de matéria rígida. No primeiro modelo, dois fluidos, matéria rígida e radiação num Universo homogêneo e isotrópicos descrito pela métrica de FLRW. Observa-se que a singularidade inicial que se apresenta no caso clássico é aparentemente removida na abordagem quântica. No segundo, um modelo cosmológico quântico anisotrópico descrito pela métrica de Kantowski-Sachs é discutido. Como resultado, verifica-se que embora o operador Hamiltoniano associado ao modelo seja simétrico, a norma da função de onda do Universo é dependente do tempo, o que implica perda de unitariedade, reforçando a suspeita de existência de uma patologia já verificada no modelo cosmológico quântico descrito pela métrica anisotrópica de Bianchi I.

**Palavras-chaves:** cosmologia quântica, formalismo de Schutz, dois fluidos, matéria rígida, Kantowski-Sachs



## ***Abstract***

*In this work, quantum cosmological models with perfect fluid are studied according to the canonical approach of Quantum Cosmology. The material content of the Universe is described by Schutz's formalism, which is discussed in detail and used as a tool in order to solve the problem of absence of a time variable in theory. In this context, two models are constructed containing a stiff matter fluid. In the first one, a two-fluid model, stiff matter and radiation in a homogeneous and isotropic Universe described by FLRW metric. It is observed that the initial singularity in the classic model is apparently removed in the quantum approach. In the second, an anisotropic quantum cosmological model described by Kantowski-Sachs metric is discussed. As a result, it is found that although the Hamiltonian operator associated with the model is symmetric, the norm of wave function of Universe is time-dependent, implying loss of unitarity, reinforcing the existence of a pathology already verified in quantum cosmological model described by Bianchi I anisotropic metric.*

***Key-words:*** *quantum cosmology, Schutz formalism, two fluids, stiff matter, Kantowski-Sachs*

# Lista de Figuras

4.1	Comportamento clássico de um modelo com dois fluidos: matéria rígida e radiação . . . . .	47
4.2	Pacote de onda não normalizado no plano $a \times \sigma$ para $t$ fixo com várias combinações dos três parâmetros $\gamma$ e $\xi$ . . . . .	51
4.3	O pacote de onda não normalizado no plano $a \times t$ para $\sigma$ fixo com várias combinações dos três parâmetros $\gamma$ e $\xi$ . . . . .	52
4.4	O pacote de onda não normalizado no plano $\sigma \times t$ para $a$ fixo com várias combinações dos três parâmetros $\gamma$ e $\xi$ . . . . .	53
4.5	O pacote de onda não normalizado como uma função apenas de uma das três variáveis, com as outras duas fixas e para várias combinações dos três parâmetros livres $\gamma$ e $\xi$ . . . . .	54
4.6	A dependência do pacote de onda não normalizado em relação aos parâmetros livres $\gamma$ e $\xi$ , para valores fixos das variáveis $a$ , $\sigma$ e $t$ . . . . .	54
5.1	O comportamento de $ \mathcal{J}_\lambda ^2$ , a qual é fornecida pela equação (5.43), e $ \mathcal{J}_\sigma ^2$ , que é obtida da equação (5.45). Aqui, adota-se $t_0 = 1.5$ . . . . .	67
5.2	Pacote de onda como uma função de $c$ e $t$ , para $a = 0, 5, 10$ e $t_0 = 1.5$ . . . .	69
5.3	Pacote de onda como uma função de $a$ e $t$ , para $c = 0, 5, 10$ e $t_0 = 1.5$ . Observa-se neste caso que $ \Psi ^2$ cresce com $a$ . . . . .	69
5.4	Pacote de onda como uma função de $a$ e $c$ , para $t = 0, 5, 10$ e $t_0 = 1.5$ . . . .	70
A.1	A função erro e a função erro complementar. . . . .	76

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Aspectos teóricos da Cosmologia Quântica</b>	<b>8</b>
2.1	Elementos da teoria da Relatividade Geral . . . . .	8
2.2	Elementos de Mecânica Quântica . . . . .	13
2.3	Equação de Wheeler-DeWitt . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Formalismo de Schutz</b>	<b>19</b>
3.1	Introdução . . . . .	19
3.2	Formalismo de Seliger-Whitham . . . . .	21
3.2.1	Construindo a ação . . . . .	22
3.2.2	As equações antigas no novo formalismo . . . . .	26
3.3	O formalismo de Schutz: a representação relativística via potenciais de velocidade . . . . .	27
3.3.1	O formalismo relativístico . . . . .	28
3.4	Aplicação do formalismo de Schutz à Cosmologia Quântica . . . . .	33
3.5	O formalismo de Schutz e a gravitação de Hořava-Lifshitz . . . . .	36
3.6	Acerca do fluido de matéria rígida . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Cosmologia Quântica com dois fluidos: radiação e matéria rígida</b>	<b>43</b>
4.1	Introdução . . . . .	43
4.2	Modelo clássico de FLRW com fluidos de matéria rígida e radiação descritos via formalismo de Schutz . . . . .	44

4.3	Modelo quântico . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Modelo cosmológico quântico de Kantowski-Sachs com fluido perfeito</b>	<b>55</b>
5.1	Introdução . . . . .	55
5.2	O modelo cosmológico quântico: a escolha do tempo e a equação de Wheeler-DeWitt . . . . .	58
5.2.1	Espaço de fase e Hamiltoniana do modelo de Kantowski-Sachs . . .	58
5.2.2	Quantização do modelo . . . . .	62
<b>6</b>	<b>Conclusões e perspectivas</b>	<b>71</b>
<b>A</b>	<b>A Função Erro</b>	<b>74</b>
<b>B</b>	<b>Aspectos elementares da termodinâmica de um fluido perfeito</b>	<b>77</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>80</b>

# Capítulo 1

## Introdução

O sertão está em toda parte

---

Guimarães Rosa

A Cosmologia é o estudo do Universo desde seu início, passando por sua história e evolução dinâmica até seus possíveis destinos finais. Entretanto, este sistema possui uma característica particular que implica que seu estudo deve ser realizado de modo distinto em relação ao que é feito para outros sistemas físicos: o espaço-tempo é a estrutura na qual todos os eventos físicos ocorrem e são discutidos. O tratamento de um sistema tão extenso exige o estabelecimento de considerações e a busca por simetrias que tornem seu estudo possível.

A discussão filosófica acerca do significado ou da abrangência da Cosmologia é longa e não constitui o foco deste trabalho. Aqui, o interesse repousa em entender elementos da estrutura e da história do Universo primordial. Para ser mais preciso, deseja-se descrever características do Universo quando ele ainda era bebê, o que em Cosmologia significa uma idade por volta de  $10^{-43}s$ , o tempo de Planck. O estudo do Universo nesta época é desenvolvido no contexto da chamada Cosmologia Quântica [1–7]. A combinação das palavras cosmologia e quântica pode parecer um tanto incoerente, uma vez que intuitivamente associa-se “cosmologia” ao estudo do Universo como um todo e a “quântica” o estudo de fenômenos que ocorrem em escalas de tamanho muito reduzido. Entretanto, sabe-se que hoje o Universo se encontra em expansão acelerada, o que sugere que ele

tenha sido muito menor no passado. No tempo de Planck, portanto, seu tamanho deve ter sido da ordem de  $10^{-33}cm$ , incrivelmente pequeno em relação ao Universo observável hoje, o que implica que, nesta escala, os efeitos quânticos eram dominantes e impõe que as ferramentas da Mecânica Quântica devam ser aplicadas. Neste sentido, cabe à Cosmologia Quântica fornecer uma descrição, ainda que aproximada, das características essenciais do Universo primordial e oferecer alternativas para a resolução de certos problemas presentes nesta escala, sendo o mais emblemático deles, possivelmente, o da singularidade inicial [4, 5]. De fato, este é um dos mais importantes problemas do Modelo Cosmológico Padrão. Caso admita-se que em seu início o Universo possui tamanho nulo, sua densidade de energia é infinita o que torna impossível estabelecer quaisquer argumentos físicos capazes de descrever este cenário. No contexto da Cosmologia Quântica essa dificuldade pode ser resolvida por diferentes vias. Uma delas, mais sofisticada, utiliza a Gravitação Quântica de Laços [7–11] para estabelecer a quantização do volume, e portanto um tamanho mínimo e maior que zero. Outra abordagem sugere o nascimento do universo *ex nihilo* via um processo de tunelamento quântico [4, 5, 12]. Neste caso, a singularidade inicial é “escondida” por uma barreira de potencial e o Universo aparece do outro lado da barreira expandindo-se a partir de então. De todo modo, a solução deste que é possivelmente o mais grave problema do Modelo Cosmológico Padrão pode ser fornecida pela Cosmologia Quântica.

Muitas das características do comportamento dinâmico do Universo atual são resultado de estados e eventos remotos, muitos dos quais associados às primeiras eras da evolução cosmológica. Estabelecer as condições iniciais que justificam as diversas fases do Universo ao longo de seu desenvolvimento é também uma das atribuições da Cosmologia Quântica. De fato, observa-se que o estabelecimento das condições iniciais para a ocorrência de um período inflacionário, das perturbações primordiais e da quebra espontânea de simetria encontram lugar no Universo primordial. Neste sentido, a Cosmologia Quântica é uma teoria de condições iniciais, além de ser uma das vertentes do programa de gravitação quântica - dentro do qual encontram-se a Teoria de Supercordas [13], a Gravitação Quântica de Laços, teorias de gravidade quântica a baixas dimensões [14], dentre outras - uma

vez que em seu início o Universo reúne as características que fazem dele um laboratório especialmente adequado para analisar os possíveis efeitos quânticos da gravitação.

Uma das abordagens mais frequentes da Cosmologia Quântica é realizada no contexto da Geometrodinâmica, também conhecida como Gravitação Canônica [4, 5]. Nesta perspectiva, a dinâmica do Universo é descrita pela evolução de seus graus de liberdade geométricos e dos campos presentes em cada instante, através da foliação do espaço-tempo quadridimensional em variedades tridimensionais sucessivas, cada uma das quais é associada a um instante de tempo, um procedimento realizado através do chamado formalismo ADM [15–17]. É evidente que se o sistema é o próprio Universo, o número de graus de liberdade presentes em cada uma dessas trivariiedades é muito grande. Considerando todas as possíveis métricas presentes nestas variedades é estabelecido o que se denomina superespaço. Entretanto, a quantização completa de um cenário tão geral é ainda inviável. Por esta razão, após considerações acerca das simetrias e características reais do Universo, considera-se um número muito reduzido de graus de liberdade, os quais são quantizados. A isto se chama quantização em minissuperespaço, procedimento frequentemente adotado na Gravitação Canônica. Contudo, o processo de foliação traz consigo uma consequência negativa: uma variável tempo explícita torna-se ausente na teoria. Como consequência, é preciso formular alternativas que preservem a qualidade da descrição da dinâmica do sistema. Um método consiste em utilizar a evolução dos graus de liberdade de natureza geométrica em cada trivariiedade e a partir daí associar um tempo de fase global [18, 19]. Pode-se citar também o uso de um campo escalar acoplado à gravidade cuja dinâmica está ligada a evolução temporal. Finalmente, outro método consiste em introduzir o tempo na teoria a partir de graus de liberdade associados a um fluido perfeito, o qual terá ainda a função de descrever o conteúdo material do Universo. Este último procedimento, utilizado nos modelos tratados neste trabalho, é realizado através do Formalismo de Schutz [20], descrito no capítulo seguinte.

Finalmente, o Universo primordial é um sistema muito pequeno em relação ao que é observado hoje, mas com nível de energia fantasticamente alto (algo em torno de  $10^{19} GeV$ ), o que implica grande dificuldade na obtenção de resultados observacionais e em estabelecer

hipóteses suportadas por suficiente evidência. Deste ponto de vista a Cosmologia Quântica poderia ser vista como portadora de um caráter fortemente especulativo. Entretanto, é preciso destacar que há menos de 30 anos diversos outros tópicos presentes na Cosmologia eram encarados de modo semelhante, mas com o desenvolvimento dos métodos teóricos, experimentais e observacionais hoje gozam de merecido reconhecimento.

Este trabalho está assim dividido: No capítulo seguinte são abordados elementos básicos da teoria da Relatividade e da Mecânica Quântica, com destaque para a discussão acerca do formalismo ADM, do significado da função de onda do Universo e da definição matemática de superespaço. O Capítulo 3 descreve detalhadamente o formalismo de Schutz [20] e contém uma discussão acerca da utilização desta formulação como alternativa para resolver o problema do tempo em Cosmologia Quântica. Além disso, uma analogia entre o formalismo de Schutz e a gravitação de Hořava-Lifshitz é discutida. No Capítulo 4 um modelo com dois fluidos, radiação e matéria rígida, preenchendo um Universo homogêneo e isotrópico descrito pela métrica de FLRW é tratado [21]. A utilização de dois fluidos para a descrição do conteúdo material do Universo introduz nesta abordagem um grau de liberdade adicional em relação aos encontrados nos modelos convencionais em que apenas um fluido é considerado, sendo este cenário discutido sob os aspectos clássico e quântico com o intuito de verificar a ocorrência de uma singularidade inicial. O fluido de matéria rígida é utilizado mais uma vez no Capítulo 5 em que um modelo quântico equipado com métrica de Kantowski-Sachs e matéria rígida é construído [22]. Este estudo tem como motivação um interessante resultado encontrado na referência [23] em que foi observada a não-unitariedade de um modelo cosmológico quântico com métrica anisotrópica de Bianchi I. Deseja-se verificar se tal incompatibilidade se manifesta também num Universo anisotrópico de Kantowski-Sachs, o que pode revelar alguma espécie de inconsistência do formalismo de Schutz quando utilizado em conjunto com métricas anisotrópicas. Finalmente, no Capítulo 6 são apresentadas as conclusões e perspectivas.



## Capítulo 2

# Aspectos teóricos da Cosmologia Quântica

### 2.1 Elementos da teoria da Relatividade Geral

Até o advento da formulação newtoniana da Mecânica, notabilizada sobretudo pela Lei da Gravitação Universal, a Cosmologia era inexistente sob o modo como é concebida hoje. De fato, apenas com a Mecânica de Newton surgem as condições de se estender as explicações dos fenômenos terrestres para descrever os movimentos celestes observados. A Cosmologia moderna só passa a exibir o protagonismo de seus dois principais “atores”, a matéria e o espaço-tempo, com um trabalho devido a Einstein, “*Cosmological Considerations on the General Theory of Relativity*” [30]. De fato, a Relatividade Geral é a teoria base da Cosmologia atual. Dois dos eventos que mais motivaram a adoção da teoria de Einstein têm origem na Astronomia: o cálculo preciso e coerente com as observações da taxa de precessão do periélio de Mercúrio [24], que não é corretamente prevista pela teoria newtoniana, e a observação do eclipse solar a partir da cidade de Sobral no Brasil e de São Tomé e Príncipe na costa ocidental da África no ano de 1919 [25], onde foi possível comprovar a deformação do espaço provocada pela presença de matéria. No cálculo da precessão do periélio de Mercúrio também foi necessário levar em conta a curvatura do espaço-tempo, característica presente na teoria da Relatividade Geral e que é, em última

análise, consequência do princípio de equivalência enunciado por Einstein: localmente, existe a completa equivalência física entre um campo gravitacional e a correspondente aceleração de um sistema de referência, o que estende o princípio da Relatividade Especial para sistemas de referência acelerados e garante a equivalência entre massa gravitacional e massa inercial.

Utilizando a teoria da Relatividade Geral, o Universo é tratado matematicamente como uma quadricidade ( ${}^4M$ ) com três dimensões espaciais e uma temporal cuja geometria é determinada pela distribuição de matéria. A separação entre dois pontos infinitesimalmente próximos é fornecida pelo elemento de linha,  $ds$ , que no espaço plano de Minkowski possui seguinte forma em coordenadas esféricas:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) .$$

Entretanto, a presença de matéria deforma o espaço-tempo, de modo que a métrica de Minkowski torna-se inadequada para a descrição do Universo observado. Neste caso, geometrias mais sofisticadas devem ser consideradas e portanto, de maneira geral,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu , \tag{2.1}$$

em que  $g_{\mu\nu}$  é a métrica, um tensor simétrico de segunda ordem cujas componentes são funções independentes das quatro coordenadas espaço-temporais. A mais habitual das métricas utilizadas em Cosmologia, que descreve um Universo homogêneo e isotrópico, é a de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), dada por:

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) . \tag{2.2}$$

Neste elemento de linha,  $a(t)$  é o fator de escala, associado ao tamanho do Universo em um determinado instante de tempo  $t$ . Já  $N(t)$  é um outro parâmetro de escala, associado à coordenada tempo, chamado função lapso. Além disso,  $k$  é o parâmetro de curvatura associado às seções espaciais podendo ter os seguintes valores: 0 (plana), 1 (esférica),  $-1$

(hiperbólica).

Por estarem associados a um Universo homogêneo e isotrópico, modelos cosmológicos descritos pela métrica de FLRW são muito populares<sup>1</sup>. Entretanto, espaços-tempos mais complicados, que descrevam cenários não-homogêneos ou não isotrópicos, podem ser relevantes. Um exemplo de métrica que descreve um Universo anisotrópico é fornecido pela métrica de Kantowski-Sachs [31], escrita como

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + a(t)^2 dr^2 + b(t)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad .$$

Esta métrica contém não um, mas dois fatores de escala<sup>2</sup>,  $a(t)$  e  $b(t)$ .

A geometria do espaço-tempo é governada pelas equações de Einstein, simbolicamente expressas como

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad , \quad (2.3)$$

com  $c = 1$ , em que  $G$  é a constante de Newton da gravitação e

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad , \quad (2.4)$$

é o tensor de Einstein, simétrico e função da métrica, associado ao aspecto quadrigométrico da variedade. Nesta equação,  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci e  $R$  é o escalar de Ricci, dados respectivamente por

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\nu\mu,\rho}^\rho - \Gamma_{\rho\mu,\nu}^\rho + \Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\lambda \quad , \quad (2.5)$$

$$R = -g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma) - (g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma - g^{\mu\sigma} \Gamma_{\mu\sigma}^\nu)_{,\nu} \quad , \quad (2.6)$$

e  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  é o símbolo de Cristoffel, calculado através de<sup>3</sup>

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \quad . \quad (2.7)$$

---

<sup>1</sup>A homogeneidade e a isotropia do Universo são consequências do Princípio Cosmológico [26].

<sup>2</sup>Adiante, no Capítulo 5, um modelo com a métrica de Kantowski-Sachs e fluido perfeito é estudado.

<sup>3</sup>Na notação tensorial utilizada, as vírgulas indicam derivadas parciais, enquanto o sinal de ponto-e-vírgula indica derivada covariante.

Já  $T_{\mu\nu}$  é o tensor momento-energia, simétrico e associado à distribuição de energia e matéria. Para um fluido perfeito, com  $c = 1$ ,  $T_{\mu\nu}$  pode ser escrito como

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu} \quad . \quad (2.8)$$

Caracteriza-se um fluido perfeito a partir de duas variáveis escalares termodinâmicas, aqui escolhidas como pressão  $p$  e densidade própria<sup>4</sup>  $\rho$ , e por um campo de velocidades  $u^\mu$ . Tanto o tensor de Einstein quanto o tensor momento-energia possuem divergência nula, isto é:

$$G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad ,$$

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad .$$

Além da elegância das equações de Einstein, a teoria da Relatividade Geral desempenha um papel essencial na solução de problemas diante dos quais a teoria newtoniana da gravitação mostra-se inadequada. A conexão entre matéria e geometria acaba por fazer da teoria de Einstein, portanto, a moderna teoria clássica do campo gravitacional. O caminho seguinte consiste em quantizar a Relatividade Geral tornando-a assim uma teoria fundamental. Entretanto, a quantização da gravitação continua sendo um dos mais complexos problemas em aberto da Física, ainda que importantes avanços tais como a teoria de cordas [13] ou a gravitação quântica de laços [11] tenham sido realizados. De todo modo, a construção de uma teoria quântica para a gravitação exige uma formulação hamiltoniana da teoria da Relatividade Geral. Além disso, a partir da Hamiltoniana as equações de campo podem ser obtidas consistentemente e uma descrição completa da dinâmica do Universo pode ser fornecida.

Como a teoria da Relatividade Geral é invariante sob reparametrizações arbitrárias de coordenadas é necessário construir técnicas para tratar dos sistemas hamiltonianos vinculados [32–35] uma vez que para obter uma Hamiltoniana para a gravitação deve-se definir uma variável tempo adequada com respeito a qual serão gerados os vínculos

---

<sup>4</sup>A densidade própria é definida como a massa de repouso por unidade de volume de repouso (volume próprio).

entre as variáveis canônicas. Isto implica uma separação entre a coordenada tempo e as demais coordenadas espaciais de modo que o espaço-tempo determinado por uma métrica lorentziana de assinatura  $(-+++)$  definido na quadriedade  ${}^4M$  deve ter sua topologia restrita ao tipo  ${}^4M = \mathbb{R} \otimes {}^3M$ . Este procedimento, matematicamente conhecido como teoria geométrica das folheações [36–38], constitui a base do conhecido formalismo ADM<sup>5</sup> [15–17, 38] da Relatividade Geral.

Utilizando o formalismo ADM, pode-se mostrar que a Hamiltoniana total da Relatividade Geral, a partir da qual é possível reproduzir as equações de Einstein, é escrita como

$$H_T = \int dt dx^3 (NH_0 + N^a H_a + \lambda P^0 + \lambda_i P^i) \quad , \quad (2.9)$$

em que  $P^0$  e  $P^i$  são os momentos canonicamente conjugados às funções lapso,  $N$ , e *shift*,  $N^i$ , as quais fazem o papel de multiplicadores de Lagrange. A função lapso é um fator de normalização correspondente à componente normal da quadri-velocidade  $U^\mu$  com a qual a tri-hipersuperfície equipada com métrica<sup>6</sup>  $h_{ab}$  evolui no tempo. Já a função *shift* corresponde à componente tangencial da quadri-velocidade. Além disso, os vínculos secundários  $H_0$  (super-Hamiltoniana) e  $H_a$  (super-momento) são dados por:

$$H_0 = G_{abcd} P^{ab} P^{cd} - \sqrt{h} {}^3R = 0 \quad , \quad (2.10)$$

$$H_a = 2P_a{}^b{}_{;b} \quad . \quad (2.11)$$

Aqui,  ${}^3R$  é o escalar de Ricci dado pela equação (2.6) sobre a trivariiedade. Os momentos  $P^{ij}$  podem ser escritos como

$$P^{ab} = -G^{abcd} K_{cd} \quad ,$$

em que utilizou-se a chamada supermétrica, definida como

$$G^{abcd} = \sqrt{h} \left[ \frac{1}{2} (h^{ac} h^{bd} + h^{ad} h^{bc}) - h^{ab} h^{cd} \right] \quad , \quad (2.12)$$

---

<sup>5</sup>Este formalismo foi desenvolvido na década de 60 por Arnowitt, Deser e Misner (ADM).

<sup>6</sup>Os índices latinos da métrica podem assumir os valores 1,2,3.

e a curvatura extrínseca que, com uma escolha adequada de calibre, pode ser escrita como

$$K_{ij} = -\dot{h}_{ij} \quad . \quad (2.13)$$

O vínculo  $H_0$  corresponde às componentes  $0\alpha$  das equações de Einstein e é responsável por gerar a dinâmica da trigeometria. Já  $H_a$  é responsável por gerar os difeomorfismos da métrica que equipa a trivariiedade,  $h_{ab}$  e corresponde à componente  $00$  das equações de Einstein. Os vínculos (2.10) e (2.11) desempenham um papel fundamental na obtenção da mais importante equação da Cosmologia Quântica: a equação de Wheeler-DeWitt.

## 2.2 Elementos de Mecânica Quântica

Assim como a Relatividade Geral, a Mecânica Quântica desempenha um papel essencial no formalismo da Cosmologia Quântica. Como as leis fundamentais da Física devem estar assentadas na teoria quântica, uma descrição do Universo em termos da Mecânica Quântica é um caminho natural.

Embora a Mecânica Quântica possa alcançar altos níveis de complexidade, suas ferramentas e procedimentos básicos podem ser elencados com relativa facilidade.

O processo de quantização, responsável pela passagem da Física Clássica para Física Quântica, é realizado através do procedimento proposto por Dirac em que as variáveis canônicas do sistema clássico são substituídas por operadores hermitianos [41]  $\hat{q}_k$  e  $\hat{p}_k$  de modo que  $[\hat{q}_k, \hat{p}_k] = i\hbar$ , sendo  $\hbar$  a constante de Planck dividida por  $2\pi$  e

$$p_k \rightarrow \hat{p}_k = \pm i \frac{\partial}{\partial q_k} \quad ,$$

em que  $q_k$  são as coordenadas generalizadas do sistema e  $p_k$  são seus momentos canonicamente associados.

A entidade básica que carrega as informações do sistema quântico é a função de onda,  $\Psi(x_1, \dots, x_n, t)$ , em que  $t$  é a coordenada temporal e  $x_1, \dots, x_n$  são as demais coordenadas espaciais ou parâmetros equivalentes aos quais está associado o sistema.  $\Psi(x_1, \dots, x_n, t)$  é

uma função complexa, o que significa que não se deve dar a ela a interpretação habitual que se concede a uma função de onda clássica. Isto quer dizer que questões do tipo “o que é realmente esta função de onda” ou “onde esta função de onda se propaga” não fazem sentido no contexto em que ela se encontra inserida. A rigor, as funções de onda que descrevem os sistemas quânticos devem ser inicialmente entendidas como ferramentas de cálculos, por meio das quais as características do sistema podem ser investigadas. Por exemplo: o conceito clássico de trajetória deve ser substituído pelo de estado dependente do tempo, o qual é descrito por  $\Psi(x_1, \dots, x_n, t)$ . Além disso, pelo princípio de de Broglie, ao movimento de uma partícula está associada uma onda, de tal modo que a partícula deve estar em algum lugar em que a onda possua amplitude considerável. Isto quer dizer que embora o conceito de trajetória clássica não encontre um correspondente quântico preciso, ainda é possível obter uma localização aproximada da partícula para determinado instante por meio da densidade de probabilidade. Considerando que o movimento desta partícula é restrito ao eixo  $x$ , a densidade probabilidade de encontrar a partícula entre as posições  $x$  e  $x + dx$ , expressa por  $P(x, t)$ , é calculada como

$$P(x, t) = \Psi(x, t)^* \Psi(x, t) \quad . \quad (2.14)$$

O resultado da medida de uma grandeza física qualquer  $A$  deve estar num conjunto de resultados possíveis  $\{a\}$ . A cada valor  $a$  está associado um estado  $\psi_a(x)$ , medido num determinado instante  $t_0$ . Como estas medidas afetam o sistema, as previsões da Mecânica Quântica são estatísticas, o que está de acordo com o princípio da incerteza de Heisenberg.

A dinâmica do sistema quântico é governada pela equação de Schrödinger, formalmente escrita em uma dimensão para uma partícula sujeita a um potencial  $V(x, t)$ , como

$$i\hbar \frac{d\Psi(x, t)}{dx} = - \left( \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x, t) \right) \Psi(x, t) \quad . \quad (2.15)$$

As soluções da equação de Schrödinger são as auto-funções associadas ao sistema. As entidades dinâmicas que podem ser medidas são chamadas de observáveis. Diferentemente

do que ocorre na Física Clássica, em mecânica quântica os observáveis são representados por operadores autoadjuntos definidos no espaço de Hilbert [41]. Assim, garante-se que os estados ortonormais associados a estes operadores formem uma base no espaço. Além disso, os autovalores dos operadores autoadjuntos são sempre reais.

Em Cosmologia Quântica,  $\Psi$  é chamada de função de onda do Universo e, necessariamente, é dependente do fator de escala do Universo,  $a$ . Caso a métrica considerada descreva um espaço-tempo anisotrópico, a função de onda será dependente dos demais fatores de escala eventualmente presentes (por exemplo, num modelo descrito pela métrica de Kantowski-Sachs equipada com os fatores de escala  $a(t)$  e  $b(t)$ , escreve-se  $\Psi(a, b)$ ). Caso seja considerada no modelo a presença de outros campos  $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ , além do gravitacional,  $\Psi$  será também função deles.

Conforme mencionado na seção 2.1, o formalismo ADM implica que a variável tempo torna-se ausente na teoria, o que dificulta a interpretação do comportamento dinâmico do Universo. Contudo, por meio de procedimentos como o formalismo de Schutz, é possível escrever  $\Psi$  de tal modo que a dependência com o tempo seja explícita. Em resumo, a função de onda do Universo pode ser denotada, de modo geral, como  $\Psi(a_1, \dots, a_n, \phi_1, \dots, \phi_n, t)$ , sendo portanto descrita pelos graus de liberdade que compõem o modelo. Quanto maior for a quantidade de graus de liberdade considerados, mais complicada deverá ser  $\Psi$  e, de maneira geral, mais características do Universo podem ser investigadas. Em particular, a utilização do formalismo de Schutz para descrever o conteúdo material do Universo permite transformar a equação principal da Cosmologia Quântica, a equação de Wheeler-DeWitt, numa legítima equação de Schrödinger dependente do tempo. Com isso, a descrição do Universo quântico passa a ter estrutura matemática semelhante àquela encontrada em problemas de Mecânica Quântica para partículas submetidas a certo potencial.

O estudo do Universo de modo semelhante ao que é realizado para descrever uma partícula governada por um potencial e cuja dinâmica é determinada pela equação de Schrödinger permite que se dê ao problema da singularidade inicial uma solução relativamente simples: o Universo não atinge tamanho zero pois surge com tamanho finito e inicia sua expansão devido a um processo de tunelamento quântico, tal como é observado



e calculado para partículas sujeitas a uma barreira de potencial [39].

## 2.3 Equação de Wheeler-DeWitt

O superespaço é o cenário onde a geometrodinâmica é desenvolvida [40]. Corresponde ao conjunto de todas as trimétricas riemannianas sobre uma dada trisuperfície sobre a qual são definidos os campos de matéria.

Considere o espaço que contém todas as trimétricas riemannianas,  $\Sigma$ , e todos os possíveis campos de matéria,  $\Phi(x)$ , que podem ser definidos sobre as hipersuperfícies descritas por elas. Simbolicamente,

$$Riem(\Sigma) = \{h_{ij}(x), \Phi(x) | x \in \Sigma\} .$$

Embora este seja um espaço de dimensão infinita, uma vez que sobre cada trisuperfície podem ser definidas infinitas trimétricas, o número de graus de liberdade a ele associados é finito (de fato, três graus de liberdade para cada um dos infinitos pontos do espaço). O superespaço é o espaço de configurações básico onde se desenvolvem as diversas teorias de gravitação quântica.

A folheação do espaço promovida através do formalismo ADM foi, até aqui, um procedimento puramente clássico. A quantização é executada através do formalismo canônico de Dirac [32], que consiste, em última análise, em substituir as equações de vínculo clássicas de primeira classe  $H_\mu = 0$  por condições sobre os estados, isto é,

$$\hat{H}_\mu \Psi(h_{ij}, \Phi) = 0 , \tag{2.16}$$

em que o operador  $\hat{H}_\mu$  atua como um aniquilador da função de onda  $\Psi(h_{ij}, \Phi)$ .

Seguindo o processo de quantização canônica, os momentos são substituídos por derivadas relativas às suas correspondentes coordenadas permitindo a construção dos operadores

a partir dos vínculos fornecidos pelo formalismo ADM, ou seja,

$$p^{ab} \rightarrow \hat{p}^{ab} = -i \frac{\delta}{\delta h_{ab}}, \quad (2.17)$$

Aplicando (2.17) aos vínculos (2.10) e (2.11), obtém-se

$$\hat{H}\Psi[h_{ab}] = \left[ -G_{abcd} \frac{\delta}{\delta h_{ab}} \frac{\delta}{\delta h_{cd}} - \sqrt{h} {}^3R \right] \Psi[h_{ab}] = 0, \quad (2.18)$$

que é a equação de Wheeler-DeWitt e,

$$\hat{H}_a \Psi[h_{ab}] = 2i \left( \frac{\delta \Psi[h_{ab}]}{\delta h_{ab}} \right)_{|b} = 0. \quad (2.19)$$

A equação anterior implica que a função de onda é a mesma para quaisquer configurações ligadas por uma transformação de coordenadas [4].

Resolver a equação de Wheeler-DeWitt corresponde a encontrar uma solução geral para o funcional  $\Psi[h_{ab}]$  sem que se considere qualquer métrica em particular, isto é, para o superespaço, o que constitui um dos mais importantes problemas em aberto na Física (com efeito, este é o passo decisivo na construção de uma teoria quântica para gravitação). Soluções para esta equação só podem ser obtidas para casos em que uma determinada métrica é fixada *a priori* e para um número limitado de campos definidos sobre o espaço. Em Cosmologia Quântica esta restrição, que define o chamado minissuperespaço, não deve ser vista como um fator que inviabiliza a construção dos modelos cosmológicos. Uma vez que o espaço-tempo é um sistema cuja geometria apresenta várias propriedades evidentes, é razoável fixar a métrica e eventuais campos de acordo com o que é observado. Isto simplifica formidavelmente o problema de lidar com vínculo  $H_\mu$  permitindo obter soluções particulares para a equação de Wheeler-DeWitt. Por esta razão, os modelos cosmológicos construídos a partir destas restrições são chamados modelos de minissuperespaço.

Note ainda que o funcional de onda  $\Psi$  não possui dependência temporal explícita. Isso é uma consequência do fato de que a Relatividade Geral é uma teoria parametrizada, o que significa que o tempo pode emergir das variáveis dinâmicas definidas sobre a tri-

hipersuperfície que estão associadas à função de onda. Tendo isso em vista, no capítulo seguinte é apresentado um formalismo que permite associar aos graus de liberdade de um fluido perfeito, cuja tarefa é descrever o conteúdo material do Universo, o papel de tempo.

# Capítulo 3

## Formalismo de Schutz

### 3.1 Introdução

O estudo e a aplicação dos conceitos da hidrodinâmica são recorrentes em Física [27]. A partir de duas áreas inicialmente distintas, a Hidrostática e a Hidráulica, Daniel Bernoulli, ainda no século XIX, formulou os primeiros trabalhos. Estudos sistemáticos em Hidrostática são muito antigos, tendo contribuições até mesmo de Arquimedes e, mais tarde, de Pascal, acerca dos fluidos incompressíveis em repouso. A Hidráulica possui ainda mais aplicações práticas, tanto em ciência aplicada quanto em engenharia e agricultura, como em problemas envolvendo métodos de irrigação. Além de Bernoulli, outros importantes nomes contribuíram neste campo de pesquisa tais como d'Alembert, Euler, Navier, Stokes, Helmholtz e Kirchhoff, entre outros.

O entendimento cada vez mais sólido a respeito da estrutura da matéria permitiu o desenvolvimento de teorias para o escoamento de um fluido. Um importante problema era determinar em até que medida deveria a matéria ser tratada como feita de partículas discretas e se seria possível considerá-la contínua, infinitamente divisível quando vista como um todo. Em Hidrodinâmica os problemas são frequentemente estudados do ponto de vista macroscópico permitindo que o fluido possa ser tratado como uma substância coesa identificada por um conjunto de pontos  $R_N$ , em que  $N$  refere-se ao número de dimensões consideradas.

Um fluido pode ser definido através de duas descrições: a euleriana e a lagrangiana. Considere uma parcela discreta ou volume do fluido. Sua descrição como um todo, feita através da evolução das parcelas que se movem ao longo do tempo, constitui a descrição lagrangiana. Neste caso, as propriedades básicas de cada parcela são representadas pela densidade  $\rho(t)$ , pressão  $p(t)$ , velocidade  $\vec{v}(t)$ , etc. O método lagrangiano é mais adequado na descrição de experimentos e simulações numéricas.

Se, por outro lado, a evolução das propriedades físicas é considerada em cada ponto do espaço de fase, ao invés de seguir a evolução de parcelas do fluido, tem-se a descrição Euleriana, a qual pode ser entendida como uma descrição de campo no sentido de que todo ponto no espaço tem certas propriedades físicas que podem ser estudadas e analisadas. Então, as propriedades do fluido em escoamento numa posição específica dependerá das coordenadas posição e tempo. De um ponto de vista matemático, pode-se representar as propriedades do fluido como  $\rho(\vec{x}, t)$ ,  $\vec{v}(\vec{x}, t)$ ,  $p(\vec{x}, t)$ , etc. Em geral, por ser de aplicação mais simples, utiliza-se a descrição Euleriana.

Em 1859, Clebsch [28] mostrou que o campo de velocidade de um fluido (na verdade, qualquer campo vetorial) poderia ser descrito com o uso de três potenciais da forma

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\phi + \xi\vec{\nabla}\beta \quad .$$

Contudo, essa decomposição apresenta uma desvantagem: os potenciais  $\phi$ ,  $\xi$  e  $\beta$  não possuem interpretações físicas claras uma vez que não há equações de evolução para cada um deles.

Seliger e Whitham [29], a fim de contornar esta dificuldade, fizeram uma decomposição dos campos de velocidade em termos de cinco potenciais escalares, ao invés de apenas três como proposto por Clebsch. Usando esta técnica foi possível obter as equações de evolução de um fluido clássico na descrição euleriana através de um princípio variacional. Nesse formalismo, a densidade lagrangiana é especialmente simples, dependendo apenas da pressão do fluido.

A ideia de usar uma analogia hidrodinâmica em outras áreas da Física é relativamente frequente, como se observa, por exemplo, nos estudos envolvendo física de plasma, óp-

tica, problemas em Eletromagnetismo, Turbulência, Geofísica, Astrofísica, Cosmologia, etc. Em particular, no caso da Cosmologia, considera-se que a matéria que preenche o universo como um todo é descrita como um fluido que expande de tal modo que os aglomerados de galáxias representam as partículas desse fluido. O caso mais simples é aquele em que considera-se um fluido perfeito, cuja equação de estado é do tipo  $p = \alpha\rho$ . Em modelos mais sofisticados, pode-se considerar outros graus de liberdade como torsão e viscosidade. No caso da Cosmologia Quântica, o formalismo variacional de Schutz [42,43] é uma generalização relativística do trabalho de Seliger e Whitham, fazendo uso agora de seis potenciais-velocidade (um a mais do que no caso newtoniano já que agora os quadri-vetores são usados como quadri-velocidade) e incluindo os efeitos do campo gravitacional, sob o ponto de vista da Relatividade Geral.

Neste capítulo, é feita uma revisão dos trabalhos de Seliger-Whitham e Schutz, mostrando suas similaridades e diferenças, bem como sua aplicação em Cosmologia. O objetivo é utilizar o formalismo de Schutz para descrever o conteúdo material do Universo através da utilização de um fluido perfeito. Os novos graus de liberdade que se apresentam no modelo cosmológico podem ser utilizados para introduzir o tempo na teoria de modo puramente fenomenológico. Discute-se também a analogia entre a aplicação da formulação de Schutz aplicada à Cosmologia e a gravitação modificada de Hořava-Lifshitz. No apêndice B encontram-se ainda alguns comentários sobre a termodinâmica de um fluido perfeito.

## 3.2 Formalismo de Seliger-Whitham

Em 1968, Seliger e Whitham [29] publicaram um importante trabalho descrevendo a Hidrodinâmica, dinâmica de plasma e elasticidade através de princípios variacionais. Para isso, foi utilizada a representação por potenciais-velocidade para escrever as equações do campo eletromagnético e a dinâmica de fluidos na descrição euleriana. A construção deste último caso é apresentada a seguir.

### 3.2.1 Construindo a ação

Na descrição euleriana da mecânica de fluidos<sup>1</sup>, as variáveis independentes são a posição (fixa)  $\vec{X}$  e o tempo,  $t$ . A velocidade euleriana  $\vec{v}(\vec{X}, t)$  está associada a parcela<sup>2</sup> de fluido passando por  $\vec{X}$  no tempo  $t$ . Todas as outras quantidades dependentes são definidas de modo análogo. A equação de evolução é

$$\rho \left( \frac{\partial V^i}{\partial t} + V^j \frac{\partial V^i}{\partial X^j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial X^i} \quad . \quad (3.1)$$

Além disso, impõe-se a conservação da massa,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X^j} (\rho V^j) = 0 \quad , \quad (3.2)$$

e a conservação da entropia específica (entropia por unidade de massa)

$$\frac{\partial s}{\partial t} + V^j \frac{\partial s}{\partial X^j} = 0 \quad . \quad (3.3)$$

O vínculo (3.3) implica ausência de fluxo de calor através da parcela.

A estes resultados, adiciona-se a equação de estado

$$p = p(\rho, s) \quad . \quad (3.4)$$

Mas, como obter as equações (3.1), (3.2) e (3.3) de um princípio variacional? Inicial-

---

<sup>1</sup>Da referência [42], "*History has mercilessly given us half a dozen different uses for the names of Lagrange and Euler. The adjectives Lagrangian and Eulerian refer, respectively, to observers comoving with the fluid or fixed with respect to some arbitrary reference frame through which the fluid flows. The functional whose integral is extremized in a variational principle is the Lagrangian density. Finally the equations that express the extremal conditions are the Euler-Lagrange equations. Because we wish to emphasize the Eulerian nature of the velocity potentials, we shall henceforth speak of their evolution equations rather than of their equations of motion.*"

<sup>2</sup>Aqui, chama-se de parcela o elemento de fluido com volume e área superficial não-infinitesimal.

mente, considera-se a ação seguinte,<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\varepsilon = & \int dt \int d^3X \left\{ \left[ \frac{1}{2} \rho V^i V_i - \rho \varepsilon \right] \right. \\ & \left. + \phi \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X^j} (\rho V^j) \right] + \theta \left[ \frac{\partial s}{\partial t} + V^j \frac{\partial s}{\partial X^j} \right] \right\} , \end{aligned} \quad (3.5)$$

em que  $\rho(X^i, t)$  é a densidade,  $V^i(X^i, t)$  a velocidade,  $\varepsilon(X^i, t)$  é a energia interna por unidade de massa do fluido passando através do ponto  $X^i$  no instante  $t$  e  $\phi$  e  $\theta$  são multiplicadores de Lagrange.

Variando a ação anterior em relação a  $V^i$ , obtém-se a seguinte equação:

$$V_i = \frac{\partial \phi}{\partial X^i} + s \frac{\partial \theta}{\partial X^i} . \quad (3.6)$$

Contudo, como discutido na referência [29], este resultado não é tão geral quanto desejado. Se a densidade de entropia  $s$  é constante, o campo de velocidade  $V^i$  exibido na equação acima (3.6), pode ser reescrito como

$$V_i = \frac{\partial (\phi + s\theta)}{\partial X^i} ,$$

e a conclusão é que a equação anterior expressa o campo de velocidade como gradiente de um escalar, isto é,  $V_i = \partial_i \Phi$ , em que  $\Phi = \phi + s\theta$ . Entretanto, o rotacional de um campo vetorial escrito como um gradiente de uma função escalar é zero. No presente caso  $\varepsilon_{ijk} \partial_j V^k = 0$ . Isso é chamado fluxo potencial ou fluxo irrotacional, um subtipo de fluxo de um fluido ideal. Como deseja-se que fluidos rotacionais possam ser descritos mesmo quando a entropia por unidade de massa não varia espacialmente, é necessário modificar (3.5). Para resolver esta questão, foi proposta na referência [45] a inclusão de um novo vínculo (e, portanto, um novo parâmetro livre) na expressão da ação: a conservação da

---

<sup>3</sup>É apropriado modificar a densidade lagrangiana convencional, substituindo a energia potencial do sistema pela energia interna como feito na referência [44].



posição de início durante o fluxo

$$\frac{\partial \gamma^i}{\partial t} + V^j \frac{\partial \gamma^i}{\partial X^j} = 0 \quad . \quad (3.7)$$

Com isso, há agora três novas equações de vínculo. Contudo, conforme discutido na referência [29], para alcançar os propósitos desejados, será considerada apenas uma única componente, a qual será identificada por  $\gamma$ . Portanto, a equação (3.5) torna-se

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\varepsilon = \int dt \int d^3X \left\{ \left[ \frac{1}{2} \rho V^i V_i - \rho \varepsilon \right] + \phi \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X^j} (\rho V^j) \right] \right. \\ \left. + \theta \left[ \frac{\partial s}{\partial t} + V^j \frac{\partial s}{\partial X^j} \right] \right\} + \beta \left[ \frac{\partial \gamma^i}{\partial t} + V^j \frac{\partial \gamma^i}{\partial X^j} \right] \quad . \end{aligned} \quad (3.8)$$

Variando a ação, equação (3.8), com respeito a  $V^i$ , obtém-se:

$$V_i = \frac{\partial \phi}{\partial X^i} + s \frac{\partial \theta}{\partial X^i} + \gamma \frac{\partial \beta}{\partial X^i} \quad . \quad (3.9)$$

Logo, é possível descrever a vorticidade independentemente do gradiente de entropia. Ainda, variando a ação com respeito a  $\rho$ ,  $s$  e  $\gamma$  podem ser obtidas, respectivamente, as seguintes relações

$$\frac{1}{2} V^i V_i - \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \varepsilon) = \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + V^j \frac{\partial \phi}{\partial X^j} \right) + s \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + V^j \frac{\partial \theta}{\partial X^j} \right) + \gamma \left( \frac{\partial \beta}{\partial t} + V^j \frac{\partial \beta}{\partial X^j} \right) \quad , \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial s} = - \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + V^j \frac{\partial \theta}{\partial X^j} \right) \quad , \quad (3.11)$$

e

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + V^j \frac{\partial \theta}{\partial X^j} = 0 \quad . \quad (3.12)$$

Integrando por partes a equação (3.8) e descartando termos de superfície, tem-se

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho v^2 - \rho \varepsilon - \rho \frac{D\phi}{Dt} - \rho s \frac{D\theta}{Dt} - \rho \gamma \frac{D\beta}{Dt} \quad , \quad (3.13)$$

em que utilizou-se a notação de derivada material, também chamada derivada substancial,

que descreve a taxa de variação temporal de alguma quantidade física como energia, temperatura ou momento para uma região fixa, visto por um observador movendo-se ao longo do fluxo, com velocidade  $V^j$ , e dada por

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + V^j \frac{\partial}{\partial x^j} . \quad (3.14)$$

Em geral, a derivada material pode servir como um elemento de ligação entre as descrições euleriana e lagrangiana.

Para simplificar a expressão da densidade lagrangiana, utiliza-se a primeira lei da termodinâmica

$$d\epsilon = Tds - pd\left(\frac{1}{\rho}\right) , \quad (3.15)$$

em que  $d\epsilon$  é a energia interna por unidade de massa de repouso e  $\rho$  é a densidade de massa de repouso. Consequentemente, pode-se escrever

$$\frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial\rho} = \epsilon + \frac{p}{\rho} \equiv \mu , \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial\epsilon}{\partial s} = T , \quad (3.17)$$

em que  $\mu(\rho, s)$  é a entalpia por unidade de massa, a qual é a soma da energia interna do sistema com o produto da pressão multiplicada pelo volume do sistema, e  $T(\rho, s)$  é a temperatura.

Substituindo a equação (3.16) em (3.10) obtém-se o resultado seguinte:

$$\mu = \frac{1}{2}v^2 - \frac{D\phi}{Dt} - s\frac{D\theta}{Dt} - \gamma\frac{D\beta}{Dt} . \quad (3.18)$$

Finalmente, substituindo a equação (3.18) em (3.13), e usando a equação (3.16) chega-se a uma densidade lagrangiana cuja forma é especialmente simples e à nova ação correspondente

$$\mathcal{L} = \rho\mu - \rho\epsilon = p \quad \rightarrow \quad \mathcal{S} = \int d^3x p . \quad (3.19)$$

### 3.2.2 As equações antigas no novo formalismo

De posse da equação (3.19), é possível obter as equações de evolução através do princípio de Hamilton. Para isso, é preciso variar a seguinte expressão

$$\mathcal{S} = \iint p(\mu, s) d^3x dt \quad . \quad (3.20)$$

Pelas equações (3.15) e (3.16), observa-se que

$$dp = \rho d\mu - \rho T ds \quad . \quad (3.21)$$

Introduzindo *a priori* a representação da velocidade por potenciais, equação (3.9),

$$V_i = \partial_i \phi + s \partial_i \theta + \gamma \partial_i \beta \quad , \quad (3.22)$$

juntamente com a equação (3.18), convenientemente reescrita na forma

$$\mu = -\frac{\partial \phi}{\partial t} - s \frac{\partial \theta}{\partial t} - \gamma \frac{\partial \beta}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \phi + s \nabla \theta + \gamma \nabla \beta)^2 \quad , \quad (3.23)$$

obtem-se

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot v \quad , \quad (3.24)$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = -T \quad , \quad (3.25)$$

$$\frac{Ds}{Dt} = 0 \quad , \quad (3.26)$$

$$\frac{D\beta}{Dt} = 0 \quad , \quad (3.27)$$

$$\frac{D\gamma}{Dt} = 0 \quad . \quad (3.28)$$

As equações no novo formalismo (3.24)-(3.28) são equivalentes às tradicionais, no sentido que todas as soluções das equações tradicionais são também soluções destas novas.

A referência [46] pode ser seguida a fim de obter a densidade hamiltoniana. Os autores chamam atenção para o fato de que, ao contrário do caso usual, obtém-se o mesmo número de equações que usando o formalismo lagrangiano, uma vez que as equações lagrangianas são de primeira ordem no tempo.

Há apenas três momentos canonicamente conjugados não-nulos:

$$\Pi_\phi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = -\rho, \quad (3.29)$$

$$\Pi_\beta \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}} = -\rho\gamma, \quad (3.30)$$

$$\Pi_\theta \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = -\rho s. \quad (3.31)$$

A densidade hamiltoniana é simplesmente

$$\mathcal{H} = \dot{\phi}\Pi_\phi + \dot{\beta}\Pi_\beta + \dot{\theta}\Pi_\theta - \mathcal{L}, \quad (3.32)$$

e, usando (3.29)-(3.31), pode-se escrever

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2\Pi_\phi} (\Pi_\phi \nabla\phi + \Pi_\beta \nabla\beta + \Pi_\theta \nabla\theta)^2 - \Pi_\phi \varepsilon(\Pi_\phi, \Pi_\theta). \quad (3.33)$$

### 3.3 O formalismo de Schutz: a representação relativística via potenciais de velocidade

Entre 1970 e 1971, dois importantes trabalhos publicados por B. F. Schutz [42, 43] com o objetivo de analisar o comportamento de um fluido perfeito na versão relativística foram publicados. Como no formalismo de Seliger-Whitham, essa versão também escreve as equações hidrodinâmicas do fluido perfeito através de potenciais-velocidade. Neste sentido, pode-se considerar esta versão relativística como uma generalização do trata-

mento proposto por Seliger-Whitham apresentado na seção anterior, ainda que não exista uma prova formal da redução da versão relativística ao caso newtoniano, como ocorre na Relatividade Geral e na Mecânica Quântica em relação à Mecânica Newtoniana.

Os trabalhos de Schutz descrevem o fluido perfeito na forma euleriana em termos de seis potenciais, em que cinco são campos escalares e o sexto é a entropia  $s$ . Quando a ação é variada com respeito aos campos escalares, as equações de evolução dos potenciais-velocidade são obtidas. Quando a ação é variada em relação ao tensor métrico, é encontrada a equação de Einstein para o fluido.

A descrição hamiltoniana do fluido é também obtida por Schutz. Esta análise é fundamental para o processo de quantização de Dirac utilizado na construção dos operadores em Cosmologia Quântica, através de sua correspondência com os observáveis clássicos.

### 3.3.1 O formalismo relativístico

O fluido perfeito relativístico de uma componente é representado por uma equação de estado do tipo  $p = p(\mu, s)$  e o tensor momento-energia é escrito como

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu} \\ &= \rho_0 \mu U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu} \quad , \end{aligned} \tag{3.34}$$

em que  $\mu = (\rho + p)/\rho_0$  é a massa inercial específica, também chamada de entalpia, conforme definida por Schutz nas referências [42, 43]. É importante destacar que não existe na literatura uma notação padronizada referente à hidrodinâmica relativística e nem com respeito à interpretação newtoniana desenvolvida por Seliger-Whitham [29]. Sendo assim, na tabela 3.1 uma comparação entre as notações usadas neste trabalho são apresentadas, de maneira similar ao encontrado em livros de hidrodinâmica relativística [47]. Isso será examinado novamente no Apêndice B.

Como se trata de um fluido perfeito, o tensor momento-energia não apresenta viscosidade ou condução de calor e suas componentes num referencial inercial comóvel são  $(\rho, p, p, p)$ .

**Tabela 3.1:** *Notações hidrodinâmicas.*

Quantidade/Referência	Seliger [29]	Schutz [42]
densidade de massa de repouso	$\rho$	$\rho_0$
densidade de matéria-energia	$\varepsilon$	$\rho = \rho_0(1 + \Pi)$
Entalpia	$\mu = \varepsilon + \frac{p}{\rho}$	$\mu = 1 + \Pi + \frac{p}{\rho_0} = \frac{\rho + p}{\rho_0}$

A condição para conservação do número de bárions é expressa como

$$(\rho_0 U^\mu)_{;\mu} = 0 \quad . \quad (3.35)$$

Classicamente, este resultado corresponde à conservação da massa, expressa pela equação (3.2).

Além disso, a condição de normalização da quadri-velocidade é

$$U^\nu U_\nu = -1 \quad , \quad (3.36)$$

a qual leva a

$$U^\nu U_\nu ; \sigma = 0 \quad . \quad (3.37)$$

Considerando o tensor momento-energia com divergência nula, isto é,

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad , \quad (3.38)$$

as equações de evolução podem ser expressas na forma de leis de conservação.

As equações hidrodinâmicas do fluido relativístico serão obtidas tendo como base as referências [42] e [48]

A partir dos vínculos impostos pelas relações (3.35) e (3.36), as quatro equações em (3.38) governarão o movimento de um fluido cuja equação de estado é conhecida. Para obter uma interpretação clara da equação (3.38), as componentes perpendicular e paralela à quadrivelocidade precisam ser separadas. Para a componente paralela, pode-se escrever

$$U_\mu T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = U_\mu [\rho_0 \mu U^\mu U^\nu + p g^{\mu\nu}]_{;\nu} = U^\nu p_{, \nu} - \rho_0 U^\nu \mu_{, \nu} = 0 \quad , \quad (3.39)$$

em que foram usadas as equações (3.35), (3.36) e (3.37). A partir de  $p_{,v} = \rho_0 \mu_{,v} - \rho_0 T s_{,v}$ , isto é, da versão relativística da equação (3.21), a expressão (3.39) torna-se

$$\rho_0 T U^v s_{,v} = 0 \quad , \quad (3.40)$$

ou seja, o movimento de um fluido perfeito relativístico preserva a entropia por bárions. Classicamente, este resultado corresponde a conservação da entropia específica, equação (3.3).

Para deixar explícita a componente perpendicular, define-se o seguinte tensor projetor:

$$P^\sigma{}_\mu = \delta^\sigma{}_\mu + U^\sigma U_\mu \quad . \quad (3.41)$$

Sob a ação do projetor acima, a equação (3.38) pode ser escrita na forma

$$P^\sigma{}_\mu T^{\mu\nu}{}_{;v} = 0 \quad ,$$

e usando as equações (3.35), (3.36) e (3.37), tem-se ainda que

$$-P^\sigma{}_\nu p_{,v} = \mu \rho_0 U_{\sigma;v} U^\nu \quad . \quad (3.42)$$

Tomando  $U^\nu = \delta^\nu{}_0$ , a seguinte expressão pode ser encontrada:

$$-\vec{\nabla} p = (\rho + p) \frac{d\vec{v}}{d\tau} \quad , \quad (3.43)$$

em que  $\vec{v}$  é a trivelocity e  $\tau$  é o tempo próprio. Desse modo, a expressão (3.42) é a versão relativística de (3.1). Usando o teorema de Pfaff<sup>4</sup>, observa-se que há quatro funções escalares  $(A, B, C, D)$  que descrevem a quadrivelocity, de modo que

$$U_\nu = A B_{,\nu} + C D_{,\nu} \quad .$$

---

<sup>4</sup>O teorema de Pfaff é um antigo resultado de formas diferenciais [42].

Schutz estendeu a proposta de Seliger-Whitham para o formalismo relativístico com a introdução de dois novos potenciais, cada um dos quais com sua própria equação de evolução. Com isso, a quadri-velocidade toma a seguinte forma:

$$U_v = \mu^{-1}(\phi_{,v} + \xi \beta_{,v} + \theta s_{,v}) \quad . \quad (3.44)$$

Logo,  $s$  é a entropia por bárions e  $\mu$  é a entalpia. Esta é uma generalização da equação (3.9) com a introdução da entalpia como um novo potencial e a substituição do termo  $-s\theta_{,v}$  por  $\theta s_{,v}$ .

Os potenciais  $\xi$  e  $\beta$  estão associados a movimentos rotacionais e são nulos em teorias que descrevem sistemas homogêneos.

Impondo a equação (3.36), tem-se

$$\mu^2 = -g^{\sigma\nu}(\phi_{,\sigma} + \xi \beta_{,\sigma} + \theta s_{,\sigma})(\phi_{,v} + \xi \beta_{,v} + \theta s_{,v}) \quad , \quad (3.45)$$

isto é, a entalpia é uma função dos outros potenciais-velocidade, de maneira similar ao exposto pela equação (3.18).

Para a formulação ser útil, em conformidade com a quadri-velocidade apresentada na equação (3.44), é necessário que as equações conhecidas de um fluido perfeito possam ser reproduzidas a partir de uma ação adequada. Como mencionado previamente, a representação de Schutz está associada a uma Lagrangiana, que generaliza a equação (3.19) para o caso relativístico, com a forma

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}(R + 16\pi p) \quad , \quad (3.46)$$

em que  $R$  é o escalar de curvatura, como definido na equação (2.6), e  $p$  é a pressão do fluido.

Considere a seguinte ação

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g}(R + 16\pi p) \quad . \quad (3.47)$$



O cálculo da variação da ação acima é obtido de

$$\delta(\sqrt{-g}R) = \left( R_{\sigma\nu} - \frac{1}{2}g_{\sigma\nu}R \right) \sqrt{-g} \delta g^{\sigma\nu} \quad ,$$

e

$$\delta(\sqrt{-g}p) = \left( -\frac{1}{2}pg_{\sigma\nu} + \frac{\partial p}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial g^{\sigma\nu}} \right) \sqrt{-g} \delta g^{\sigma\nu} \quad ,$$

mas, considerando a equação (3.45), pode-se escrever

$$\frac{\partial \mu}{\partial g^{\sigma\nu}} = -\frac{\mu}{2} U_\sigma U_\nu \quad .$$

Além disso, da equação (3.21), obtém-se

$$\frac{\partial p}{\partial \mu} = \frac{(\rho + p)}{\mu} \quad ,$$

e então,

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}p)}{\delta g^{\sigma\nu}} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} [pg_{\sigma\nu} + (\rho + p)\mu U_\sigma U_\nu] \quad .$$

Se  $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g} = 0$ , encontra-se as conhecidas equações de Einstein para um fluido perfeito:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \rightarrow R_{\sigma\nu} - \frac{1}{2}g_{\sigma\nu}R = 8\pi [pg_{\sigma\nu} + (\rho + p)U_\sigma U_\nu] \quad . \quad (3.48)$$

Variando a ação em relação aos potenciais-velocidade  $\beta$ ,  $\xi$ ,  $S$  e  $\theta$ , respectivamente, num procedimento análogo ao realizado previamente, obtém-se quatro equações de primeira ordem não lineares acopladas

$$U^\nu \xi_{,\nu} = 0 \quad , \quad (3.49)$$

$$U^\nu \beta_{,\nu} = 0 \quad , \quad (3.50)$$

$$U^\nu \theta_{,\nu} = T \quad , \quad (3.51)$$

$$U^\nu S_{,\nu} = 0 \quad . \quad (3.52)$$

Contraindo (3.44) com  $U^\nu$  e usando (3.50) e (3.52) pode-se escrever:

$$U^\nu \phi_{,\nu} = -\mu \quad . \quad (3.53)$$

Finalmente, variando a ação com respeito a  $\phi$ , recupera-se a conservação do número de bárions (3.35).

As equações (3.51) e (3.53) refletem o caráter dinâmico dos potenciais  $\theta$  e  $\phi$  com suas evoluções determinadas pelas condições termodinâmicas do fluido.

As equações no novo formalismo são também equivalentes àsquelas do formalismo antigo. A prova desta equivalência foi feita por Schutz em [42] de um modo muito elegante.

### 3.4 Aplicação do formalismo de Schutz à Cosmologia Quântica

A quantização em minissuperespaço torna possível obter soluções exatas para a equação de Wheeler-DeWitt. Entretanto, há dois altos preços pagos neste procedimento. O primeiro consiste na redução do número de graus de liberdade do sistema o que, em algumas circunstâncias, pode sugerir que importantes efeitos da gravitação não se manifestem nos modelos. O segundo, devido à utilização do formalismo ADM, é a perda de uma variável dinâmica que possa ser facilmente associada ao tempo.

Em Cosmologia, o conteúdo material do universo pode ser modelado como um fluido. A descrição deste fluido via o formalismo de Schutz permite a introdução de graus de liberdade adicionais à teoria. Embora isso possa representar um aumento das dificuldades técnicas em obter a função de onda do Universo, aos graus de liberdade do fluido perfeito atribui-se a evolução temporal, de tal modo que o tempo é introduzido fenomenologicamente no modelo.

Como um exemplo, um modelo cosmológico quântico homogêneo e isotrópico com

métrica de FLRW é analisado:

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right). \quad (3.54)$$

A ação da gravitação sem a presença de outros campos além do gravitacional é dada por:

$$\mathcal{S}_g = \int d^4x \sqrt{-g} R. \quad (3.55)$$

O formalismo Hamiltoniano pode ser usado para descrever o sistema. Com a métrica (3.54) e com a ação (4.2), obtém-se a Hamiltoniana associada ao campo gravitacional:

$$H_g = -\frac{p_a^2}{24a} - 6ka, \quad (3.56)$$

em que  $p_a$  é o momento canonicamente conjugado ao fator de escala  $a$ .

O conteúdo material do universo é modelado como um fluido perfeito descrito pelo formalismo de Schutz. No caso de um universo de FLRW, a ação do fluido, dada por

$$\mathcal{S}_f = \int d^4x \sqrt{-g} p, \quad (3.56)$$

pode ser escrita como

$$\mathcal{S}_f = \int dt Na^3 \rho, \quad (3.56)$$

em que um fator de fase global da integral espacial foi descartado uma vez que não exerce influência nas equações de movimento.

Usando novamente a métrica (3.54) e a densidade de energia em termos da entalpia (B.9)<sup>5</sup>, tem-se que:

$$\mathcal{S}_f = \int dt \left[ Na^3(\alpha) \left( \frac{\mu}{\alpha+1} \right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} e^{-\frac{s}{\alpha}} \right]. \quad (3.57)$$

Como uma consequência da equação (3.45) pode-se escrever

$$\mu = \frac{1}{N}(\dot{\phi} + \theta \dot{s}). \quad (3.58)$$

---

<sup>5</sup>Detalhes podem ser encontrados no apêndice B.

Aqui, considera-se que os potenciais-velocidade escalares que descrevem movimentos de rotação são nulos devido às simetrias do modelo. Inserindo a equação acima em (3.57) obtém-se que

$$\mathcal{S}_f = \int dt \left[ N^{-\frac{1}{\alpha}} a^3 \frac{\alpha}{(\alpha+1)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}} (\dot{\phi} + \theta \dot{s})^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} e^{-\frac{s}{\alpha}} \right] ,$$

e então,

$$\mathcal{L}_f = N^{-\frac{1}{\alpha}} a^3 \frac{\alpha}{(\alpha+1)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}} (\dot{\phi} + \theta \dot{s})^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} e^{-\frac{s}{\alpha}} . \quad (3.59)$$

Logo, os momentos canonicamente conjugados  $\phi$  e  $s$  podem ser reescritos como

$$P_\phi = N^{-\frac{1}{\alpha}} a^3 (\dot{\phi} + \theta \dot{s})^{\frac{1}{\alpha}} (\alpha+1)^{-\frac{1}{\alpha}} e^{-\frac{s}{\alpha}} , \quad (3.60)$$

e

$$P_s = \theta P_\phi .$$

Por métodos canônicos, a Hamiltoniana do fluido,  $H_f$ , pode ser expressa como

$$\begin{aligned} NH_f &= \dot{\phi} P_\phi + \dot{s} P_s - \mathcal{L}_f \\ &= (\dot{\phi} + \theta \dot{s}) P_\phi - N^{-\frac{1}{\alpha}} a^3 \frac{\alpha}{(\alpha+1)^{1+\frac{1}{\alpha}}} (\dot{\phi} + \theta \dot{s})^{1+\frac{1}{\alpha}} e^{-\frac{s}{\alpha}} . \end{aligned} \quad (3.61)$$

Usando a equação (3.60) tem-se que

$$H_f = \frac{P_\phi^{\alpha+1} e^s}{a^{3(\alpha)}} .$$

Para reescrever a Hamiltoniana de um modo mais simples, introduz-se a seguinte transformação canônica:

$$t = -P_s e^{-s} P_\epsilon^{-\alpha+1} , \quad p_t = P_\epsilon^{\alpha+1} e^s , \quad \bar{\epsilon} = \epsilon - \alpha + 1 \frac{P_s}{P_\epsilon} , \quad \bar{P}_\epsilon = P_\epsilon . \quad (3.62)$$

Então,

$$H_f = \frac{p_t}{a^{3\alpha}} . \quad (3.63)$$

Observa-se o aparecimento de um momento linear canônico na teoria associado aos graus de liberdade do fluido perfeito, o qual será associado ao tempo.

Com a Hamiltoniana (3.63), a Hamiltoniana total,  $H$ , a qual descreve o comportamento dinâmico do universo pode ser escrita como

$$H = H_g + H_f = -\frac{p_a^2}{24a} - 6ka + \frac{p_t}{a^{3\alpha}} \quad . \quad (3.64)$$

De acordo com a quantização de Dirac, tem-se que

$$p_k \rightarrow \hat{p}_k = \pm i \frac{\partial}{\partial q_k} \quad ,$$

e a equação de Wheeler-DeWitt é obtida fazendo o operador resultante atuar como um aniquilador da função de onda do Universo  $\Psi$  de tal modo que

$$\hat{H}\Psi(a,t) = \left( -\frac{1}{24a} \frac{\partial^2}{\partial a^2} - 6ka + a^{-3\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi(a,t) = 0 \quad . \quad (3.65)$$

Note que a introdução dos graus de liberdade associados ao fluido fizeram surgir um termo na Hamiltoniana que depende linearmente de um dos momentos canônicos, transformando a equação acima numa legítima equação de Schrödinger com a qual a evolução do sistema pode ser descrita. Neste ponto, o formalismo de Schutz é uma poderosa ferramenta por associar aos graus de liberdade do fluido, incluindo sua entropia, o papel crucial de tempo.

### 3.5 O formalismo de Schutz e a gravitação de Hořava-Lifshitz

Múltiplos modelos cosmológicos associados a conteúdos materiais distintos podem ser estudados a partir da escolha de diferentes valores do parâmetro  $\alpha$  [12, 49, 50, 84], estando cada fase da evolução do Universo associada a um fluido predominante. Pode-se questionar que a introdução fenomenológica de um fluido associado à matéria presente no universo

seja um processo um tanto artificial. Entretanto, cenários cosmológicos matematicamente equivalentes aos construídos através do formalismo de Schutz podem ser encontrados em outros modelos que tomam como base abordagens distintas. Em particular, pode-se citar uma notável conexão entre o modelo de FLRW preenchido com um fluido de matéria rígida [51], por exemplo, o qual exerce relevante contribuição para a história do Universo primordial, com o modelo de FLRW construído a partir de uma ação modificada da gravitação: a de Hořava-Lifshitz [52–57].

A construção de uma teoria quântica para a gravitação é um dos mais importantes problemas em aberto em Física teórica. O estabelecimento do Modelo Padrão de Partículas e Campos, após o advento da Mecânica Quântica, permitiu descrever três das quatro interações fundamentais: o Eletromagnetismo e as interações nucleares Forte e Fraca. Por outro lado, a teoria da Relatividade Geral possibilita a descrição da quarta interação, a gravitacional. Deve-se destacar que, em ambos os casos, importantes resultados puderam ser obtidos, sendo alguns confirmados recentemente: a detecção do Bóson de Higgs, já previsto pelo Modelo Padrão [58] e a observação das ondas gravitacionais, previstas por Einstein [59]. Contudo, apesar destes resultados animadores, existe um aspecto que dificulta o estabelecimento de uma teoria quântica para a gravitação: a teoria da Relatividade Geral é não-renormalizável. Uma alternativa é modificar a teoria introduzindo correções na ação de Einstein-Hilbert com termos de ordens superiores em  $R$  (como  $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ ). Entretanto, este procedimento acaba por provocar perda de unitariedade. O teorema de Ostrogradsky possui uma consequência que explica este fato: qualquer teoria da gravidade que admita derivadas temporais de ordem maior que 2 e que seja invariante sob transformações de Lorentz é instável<sup>6</sup>.

O próprio teorema pode ser usado como base para justificar o seguinte fato: é possível introduzir na Lagrangiana associada a uma teoria quântica da gravitação derivadas espaciais de ordem maior que 2, preservando a derivada temporal com ordem inferior, desde que se abra mão da invariância de Lorentz. É este o caminho seguido pela gravitação de Hořava. A gravitação de Hořava-Lifshitz propõe a quebra da invariância de Lorentz

---

<sup>6</sup>Teorema de Ostrogradsky: Um sistema não é estável se é descrito por uma Lagrangiana não-degenerada que admite derivada temporal maior que 2.

com um escalonamento anisotrópico do tipo Lifshitz entre o espaço e o tempo a altas energias e aproximadamente recupera a invariância em situações de baixas energias, isto é, na região do infravermelho. Espera-se que esta teoria seja renormalizável e unitária em altas energias.

A quebra da invariância de Lorentz é executada através da utilização de um escalonamento anisotrópico que tem origem nos campos escalares de Lifshitz presentes em matéria condensada. Sendo  $t$  a coordenada temporal e  $x^i$  a representação das coordenadas espaciais, o escalonamento é escrito como

$$t \rightarrow b^{-z}t, \quad x^i \rightarrow b^{-1}x'^i, \quad (i = 1, 2, \dots, d), \quad (3.66)$$

em que  $z$  é o chamado expoente crítico. A invariância de Lorentz exige que  $z = 1$ . Caso  $z$  seja maior ou igual a  $d$ , a invariância será quebrada. Numa variedade Riemanniana tridimensional,  $d = 3$ , o que será o valor considerado para  $z$ . Mesmo assim, a teoria respeita a foliação do espaço preservando o difeomorfismo quadridimensional, a principal simetria da Relatividade Geral, o que implica que todos os vínculos são mantidos e nenhum é adicionado<sup>7</sup>. Assim, o formalismo ADM e, por consequência, a abordagem canônica da gravitação permanecem inalterados.

A ação de Hořava-Lifshitz, em nível cosmológico, é dada por [54, 55]

$$S_{HL} = \frac{M_{Pl}}{2} \int d^3x dt N \sqrt{g} \left[ K_{ij}K^{ij} - \lambda K^2 - g_0 M_{Pl}^2 - g_1 R - g_2 M_{Pl}^{-2} R^2 - g_3 M_{Pl}^{-2} R_{ij}R^{ij} - \right. \\ \left. - g_4 M_{Pl}^{-4} R^3 - g_5 M_{Pl}^{-4} R(R^i{}_j R^j{}_i) - g_6 M_{Pl}^{-4} R^i{}_j R^j{}_k R^k{}_i - g_7 M_{Pl}^{-4} R \nabla^2 R - g_8 M_{Pl}^{-4} R_{jk;i} R^{jk;i} \right], \quad (3.67)$$

em que  $M_{Pl}$  denota a massa de Planck e  $g_i$  representa constantes adimensionais. Note que se  $g_1 = -1$  e  $\lambda \rightarrow 1$  a Relatividade Geral pode ser recuperada com os demais  $g_i$  anulando-se. A constante cosmológica  $\Lambda$  pode ser escrita em unidades de Planck como  $\Lambda = \frac{g_0 M_{Pl}^2}{2}$ .

<sup>7</sup>Entretanto, na gravitação de Hořava-Lifshitz, ao contrário da Relatividade Geral, o escalonamento anisotrópico exposto na equação (3.66) implica que há agora três vínculos locais (de fato, três vínculos em cada ponto espacial para cada variedade e portanto para cada tempo) e um global (um vínculo Hamiltoniano integrado sobre todo espaço para cada tempo).

Substituindo a métrica de FLRW, redefinindo as constantes  $g_i$  como [60, 61]

$$g_c = \frac{2}{3\lambda - 1} , \quad (3.68)$$

$$g_\Lambda = \frac{\Lambda M_{Pl}^{-2}}{9\pi^2(3\lambda - 1)^2} , \quad (3.69)$$

$$g_R = 24\pi^2(3g_2 + g_3) , \quad (3.70)$$

$$g_s = 288\pi^4(3\lambda - 1)(9g_4 + 3g_5 + g_6) , \quad (3.71)$$

e escolhendo unidades apropriadas, a ação (3.67) passa a ser da forma seguinte:

$$S_{HL} = \frac{1}{2} \int dt \left( \frac{N}{a} \right) \left[ - \left( \frac{a}{N} \dot{a} \right)^2 + g_c a^2 - g_\Lambda a^4 - g_R - \frac{g_s}{a^2} \right] . \quad (3.72)$$

Seguindo o formalismo canônico, pode-se escrever a Hamiltoniana associada à ação de Hořava-Lifshitz como

$$H = -\frac{p_a^2}{24a} - g_c a - g_\Lambda a^3 + \frac{g_R}{a} + \frac{g_s}{a^3} . \quad (3.73)$$

Na referência [54] o modelo cosmológico de Hořava-Lifshitz, em associação com a equação de Wheeler-DeWitt usa a superposição de estados quânticos estacionários quase-gaussianos obtidos para descrever a transição do regime quântico para o regime clássico do Universo. A análise desta transição é realizada através do uso da chamada função de Wigner e o correspondente fluxo de Wigner. A superposição destes estados leva o fluxo de Wigner a apresentar comportamento fortemente oscilatório, o qual é atenuado pela presença de conteúdos materiais típicos da fase primordial do Universo pós-inflacionário: radiação, constante cosmológica, curvatura e matéria rígida. Na referência [62], um modelo cosmológico quântico de Hořava-Lifshitz é proposto, tendo seu conteúdo material descrito por um fluido de radiação introduzido via formalismo de Schutz.

Uma interessante consequência da gravitação de Hořava-Lifshitz pode ser obtida a



partir da equação (3.73) [57]. Utilizando-se o formalismo Hamiltoniano, pode-se obter

$$\frac{3(3\lambda - 1)}{2} \frac{\dot{a}}{a} = 8\pi G \left[ \rho + \frac{C(t)}{a^3} \right], \quad (3.74)$$

em que  $\rho = \frac{3}{8\pi G} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)$  é a densidade de energia total da matéria. A relação acima assemelha-se à equação de Friedmann mas com um termo extra do tipo  $\frac{C(t)}{a^3}$  que sugere a matéria escura a baixas energias. Portanto, com a métrica de FLRW, algo como a matéria escura parece emergir na teoria de Hořava como uma constante de integração.

A ação de Hořava-Lifshitz emprega a condição de balanço para as componentes de curvatura descritas por constantes de acomplamento adimensionais  $g_i$ . Isto permite identificar na Hamiltoniana do minissuperespaço produzido a partir dessa ação, com métrica de FLRW, contribuições análogas àsquelas associadas a certos fluidos perfeitos descritos pelo formalismo de Schutz acoplados à ação de Einstein convencional, ainda que tenham origens completamente distintas. De fato, a equação (3.64) pode ser particularizada para o fluido de matéria rígida,  $\alpha = 1$ , e utilizando-se um calibre adequado, pode-se escrever:

$$H = -\frac{p_a^2}{24a} - 6ka + \frac{p_T}{24a^3}. \quad (3.75)$$

Já para o caso de radiação,  $\alpha = 1/3$ , tem-se que

$$H = -\frac{p_a^2}{24a} - 6ka + \frac{p_T}{24a}. \quad (3.76)$$

Nos dois casos, encontra-se em (3.73) o correspondente termo aos respectivos fluidos, mostrando que as equações são equivalentes para os fatores  $g_i$  apropriados. Desse modo, a contribuição da matéria, a qual pelo formalismo de Schutz é feita a partir de um fluido perfeito relativístico, pode ser introduzida elegantemente no contexto da Cosmologia de Hořava-Lifshitz, o que a primeira vista é um resultado curioso uma vez que é notável a diferença entre as origens das duas abordagens.

No trabalho original de Hořava não havia o termo análogo ao de matéria rígida,  $g_s$ , o qual veio a ser introduzido em artigos posteriores [55, 63]. Nos capítulos seguintes o fluido

de matéria rígida será utilizado em dois contextos distintos: num modelo preenchido por dois fluidos (matéria rígida e radiação) e num Universo anisotrópico descrito pela métrica de Kantowski-Sachs. Convém, portanto, descrever alguns aspectos deste fluido em particular.

### 3.6 Acerca do fluido de matéria rígida

Um dos objetivos da Cosmologia Quântica é estabelecer condições iniciais que justifiquem certos fenômenos e épocas presentes no Modelo Cosmológico Padrão, sobretudo aquelas que ocorrem próximas ao início do Universo. Uma delas é a era da inflação [64–66], um período de expansão exponencial pelo qual passou o Universo e que deixou relíquias na radiação cósmica de fundo (CMB). De fato, a inflação se apresenta como a mais remota fase com respeito a qual dados experimentais podem ser obtidos [67]. A violenta expansão a que o Universo é submetido no período inflacionário sugere que deve ter ocorrido uma considerável redução de sua temperatura, a qual precisaria ter um valor adequado a fim de que se pudesse iniciar a chamada era da nucleossíntese primordial, época em que são produzidos os primeiros elementos químicos leves, tais como o Hidrogênio, o Hélio, o Lítio e seus isótopos [68]. Por esta razão, a existência de uma era inflacionária impõe que o Universo tenha atravessado, entre a inflação e a nucleossíntese, um período de reaquecimento.

A descrição desta época é ainda carregada de certas incertezas. Durante algum tempo acreditou-se que este período era dominado por um fluido de radiação ( $\alpha = 1/3$ ). Contudo, atualmente admite-se a hipótese de que no intervalo de tempo que decorre entre o fim da inflação e o início da nucleossíntese, a radiação teve seu protagonismo antecedido pelo chamado fluido de matéria rígida ( $\alpha = 1$ ) [70, 71]. Proposto por Zel’dovich na década de 60, o fluido perfeito de matéria rígida é constituído de um gás frio de bárions cuja equação de estado é  $p = \rho$  e pode ser descrito através de um campo escalar livre não-massivo [72, 73]. O cálculo da densidade de energia para a matéria rígida revela que esta quantidade é proporcional, no calibre  $N = 1$ , a  $a^{-6}$  e o universo expande-se de modo mais

rápido do que quando dominado por um fluido de radiação, cuja densidade de energia no mesmo calibre é proporcional a  $a^{-4}$ . Em comparação com os modelos que admitem que o período entre a inflação e a nucleossíntese foi dominado apenas pela radiação, aqueles que consideram a existência do fluido de matéria rígida prevêm modificações na descrição da bariogênese devido a expansão e ao resfriamento do Universo, sendo mais eficientes para explicar a abundância observada de partículas bariônicas [74–76]. A presença do fluido de matéria rígida deve ainda ter contribuído para o aspecto do espectro das ondas gravitacionais criadas durante a inflação [77–79].

Devido à relevância da matéria rígida no Universo remoto, modelos cosmológicos em que este fluido é considerado têm sido estudados já há algum tempo [80–83]. Nos próximos capítulos, o fluido de matéria rígida é introduzido em modelos em que estão presentes outros graus de liberdade. No capítulo seguinte, investiga-se um cenário, sob os aspectos clássico e quântico, em que a matéria rígida vem acompanhada de um fluido de radiação, ambos descritos pelo formalismo de Schutz. Em seguida, no Capítulo 5, graus de liberdade de natureza geométrica são introduzidos a partir do uso da métrica anisotrópica de Kantowski-Sachs.

## Capítulo 4

# Cosmologia Quântica com dois fluidos: radiação e matéria rígida

### 4.1 Introdução

A solução da equação de Wheeler-DeWitt para uma métrica e campos quaisquer definidos sobre uma variedade espacial é o grande objetivo de uma Teoria Quântica da Gravitação que siga a abordagem canônica. Entretanto, não são conhecidas soluções para a equação de Wheeler-DeWitt no superespaço. No caso da Cosmologia Quântica tal problema é menos preocupante uma vez que o Universo possui simetrias. Uma vez fixada a métrica, os campos e o conteúdo material, a função de onda do Universo pode, a princípio, ser obtida no assim definido minissuperespaço. Entretanto, espera-se que a inclusão de um número crescente de novos graus de liberdade no problema torne mais realistas os resultados obtidos e conduza a uma descrição mais acurada dos fenômenos estudados, ainda que leve a complicações técnicas. A adição destes novos graus de liberdade pode ser realizada por diferentes vias. Na descrição hidrodinâmica do conteúdo material, um caminho adequado consiste em utilizar não apenas um, mas dois fluidos [12, 21, 48].

Neste capítulo, estuda-se um modelo cosmológico quântico homogêneo e isotrópico, descrito pela métrica de FLRW, com dois fluidos perfeitos que exercem um importante papel no universo primitivo: matéria rígida e radiação, cujas equações de estado são,

respectivamente,  $p = \rho$  e  $p = 1/3\rho$ . Radiação e matéria rígida desempenham, simultaneamente, papéis importantes em determinadas fases do Universo como, por exemplo na época do reaquecimento após a inflação [82, 83]. Ambos os fluidos são descritos através do formalismo de Schutz e um deles é escolhido para fazer o papel de tempo na teoria, seguindo os mesmos passos já estudados no Capítulo 3, permitindo que se obtenha como resultado, no caso quântico, uma função de onda do Universo dependente do tempo. Na seção seguinte o modelo é construído para o caso clássico, em que se obtém analiticamente o comportamento do fator de escala do universo.

## 4.2 Modelo clássico de FLRW com fluidos de matéria rígida e radiação descritos via formalismo de Schutz

Considere um Universo homogêneo e isotrópico cuja geometria é descrita pela métrica de FLRW,

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + a(t) \left( \frac{1}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (4.1)$$

em que  $N(t)$  é a função lapso,  $k$  é o parâmetro de curvatura, que pode assumir os valores  $-1, 0, 1$  e  $a(t)$  é o fator de escala do Universo. A ação associada ao campo gravitacional é dada por

$$S_g = \int \sqrt{-g} R d^4x + \int_{\partial M} d^3x \sqrt{h} h_{ij} K^{ij}, \quad (4.2)$$

em unidades tais que  $(8\pi G/3)^{\frac{1}{2}} = 1$ ,  $R$  é o escalar de Ricci do espaço-tempo,  $h_{ij}$  é a trimétrica sobre a fronteira  $\partial M$  da quadrivariiedade  $M$  e  $K_{ij}$  é a curvatura extrínseca. Substituindo a métrica (4.1) em (4.2) e usando o formalismo ADM da Relatividade Geral [15], é possível escrever a Hamiltoniana da gravitação como

$$H_g = -\frac{p_a^2}{24a} - 6ka. \quad (4.3)$$

Neste modelo, um Universo descrito por dois fluidos perfeitos que não interagem é

considerado: matéria rígida e radiação. Para descrever o comportamento dinâmico destes fluidos utiliza-se o formalismo de Schutz, conforme o Capítulo 3. Sendo assim, como a Hamiltoniana da matéria é dada por

$$H_f = \frac{p_T}{a^{3\alpha}} , \quad (4.4)$$

e a Hamiltoniana total é  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_g + \mathcal{H}_f$ , usando a equação (4.3), tem-se que

$$\mathcal{H} = -\frac{p_a^2}{24a} - 6ka + \frac{p_T}{a^{3\alpha}} . \quad (4.5)$$

Novamente, ressalte-se que a Hamiltoniana acima é linear em um dos momentos e portanto é possível introduzir a variável  $T$  como um tempo de fase global [85].

O formalismo ADM também mostra que a função lapso  $N$  age como um multiplicador de Lagrange do sistema, tal que

$$\mathcal{H} \approx 0 , \quad (4.6)$$

em que o símbolo  $\approx 0$  significa fracamente zero.

Considerando a presença dos dois fluidos, pode-se escrever

$$H = N\mathcal{H} = N \left( -\frac{p_a^2}{24a} - 6ka + \frac{p_T}{a^{3\alpha}} + \frac{p_\sigma}{a^{3\beta}} \right) . \quad (4.7)$$

Neste ponto, particulariza-se para os fluidos perfeitos de radiação ( $\alpha = \frac{1}{3}$ ) e matéria rígida ( $\beta = 1$ ) e considera-se o caso de curvatura nula ( $k = 0$ ). Deste modo, a equação (4.7) fica escrita sob a forma

$$H = N\mathcal{H} = N \left( -\frac{p_a^2}{24a} + \frac{p_T}{a} + \frac{p_\sigma}{a^3} \right) . \quad (4.8)$$

Usando as equações de Hamilton, pode-se escrever

$$\dot{p}_a = -\frac{\partial(N\mathcal{H})}{\partial a} = -N \left( \frac{p_a^2}{24a^2} - \frac{p_T}{a^2} - 3\frac{p_\sigma}{a^4} \right) , \quad (4.9)$$

$$\dot{p}_T = -\frac{\partial(N\mathcal{H})}{\partial T} = 0 \rightarrow p_T = \text{const.} , \quad (4.10)$$

$$\dot{p}_\sigma = -\frac{\partial(N\mathcal{H})}{\partial\sigma} = 0 \rightarrow p_\sigma = \text{const.}, \quad (4.11)$$

$$\dot{a} = \frac{\partial(N\mathcal{H})}{\partial p_a} = -\frac{Np_a}{12a}, \quad (4.12)$$

$$\dot{T} = \frac{\partial(N\mathcal{H})}{\partial p_T} = \frac{N}{a}, \quad (4.13)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial(N\mathcal{H})}{\partial p_\sigma} = \frac{N}{a^3}. \quad (4.14)$$

Procede-se à escolha  $t = T$ , tal que  $N = a$  em (4.13). Então,  $T$  deve ser o tempo conforme, de modo que o papel de tempo na teoria é realizado pelo fluido de radiação. Usando o calibre  $N = a$  nas equações de Hamilton e na equação de vínculo (4.6), obtém-se a equação da dinâmica clássica para o fator de escala

$$\dot{a}^2 - \frac{1}{6}\left(p_T + \frac{p_\sigma}{a^2}\right) = 0, \quad (4.15)$$

ou

$$\ddot{a} + \frac{1}{6}\frac{p_\sigma}{a^3} = 0, \quad (4.16)$$

Note que comparando a equação (4.15) com a equação de Friedmann obtida das equações de Einstein, é possível identificar

$$p_\sigma = \frac{M_{\text{Pl}}^{-2}}{2}\rho_s^*, \quad (4.17)$$

$$p_T = \frac{M_{\text{Pl}}^{-2}}{2}\rho_r^*, \quad (4.18)$$

em que  $M_{\text{Pl}}$  é a massa de Planck reduzida e  $\rho_s^*$  e  $\rho_r^*$  são as densidades de matéria rígida e de radiação quando  $a = a_*$ .

Pode-se agora integrar a equação (4.15). Com isso, encontra-se

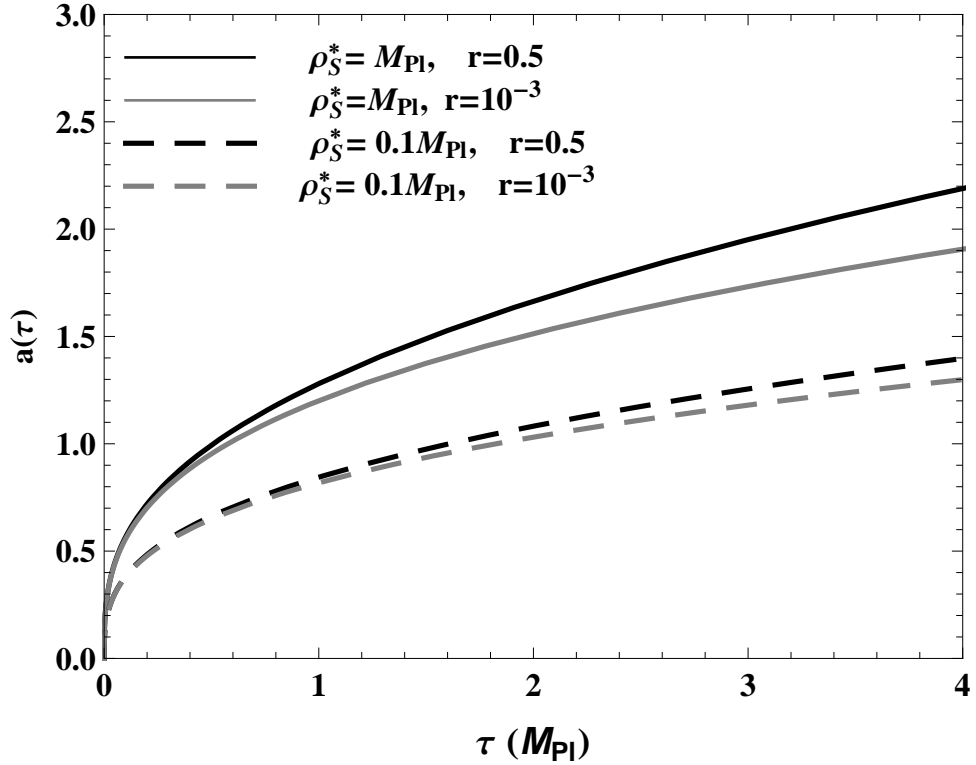
$$a(\tau) = \sqrt{rA^2t^2 + 2At} \quad (4.19)$$

com  $r = \frac{\rho_r^*}{\rho_s^*}$  e  $A^2 = \frac{M_{\text{Pl}}^{-2}}{3}\rho_s^*$ .

O tempo conforme  $t$  está relacionado ao tempo cósmico  $\tau$  via  $d\tau = N(t)dt = a(t)dt$  e com ajuda da equação (4.19), encontra-se:

$$\tau = \frac{\ln(\sqrt{2rA^3})}{\sqrt{r^3A^2}} + \frac{a(\tau)}{2} \left( \frac{1}{rA} + t \right) - \frac{\ln(rA^2t^{1/2} + \sqrt{2rA^3 + r^2A^4t})}{\sqrt{r^3A^2}}. \quad (4.20)$$

Usando as equações (4.19) e (4.20) pode-se esboçar o gráfico do fator de escala  $a$  como uma função do tempo cósmico  $\tau$ . Na figura (4.1) é mostrado o comportamento do fator de escala para diferentes valores de densidades de matéria rígida e radiação no ponto fixo  $a_* = 1$ . A taxa de crescimento do fator de escala é mais sensível para a quantidade de matéria rígida, mas como seu valor cai muito rapidamente, o fator de escala tende muito rapidamente para o comportamento do Universo permeado pelo fluido de radiação. Neste cenário, o Universo contendo estes dois fluidos é singular em seu início.



**Figura 4.1:** Comportamento clássico de um modelo com dois fluidos: matéria rígida e radiação

Naturalmente, para valores pequenos de  $t$  e  $a$ , o formalismo clássico não é capaz de



dar conta dos importantes efeitos quânticos presentes nessa fase. Portanto, é necessário quantizar a teoria obtida.

### 4.3 Modelo quântico

O modelo quântico é construído fazendo a quantização dos momentos canonicamente conjugados na equação (4.8) seguindo o procedimento proposto por [32]. Os momentos associados às coordenadas  $a$ ,  $T$  e  $\sigma$  são

$$\hat{p}_a = -i \frac{\partial}{\partial a}, \quad \hat{p}_T = -i \frac{\partial}{\partial T}, \quad \hat{p}_\sigma = -i \frac{\partial}{\partial \sigma}.$$

Então, o vínculo Hamiltoniano  $\mathcal{H}$  torna-se o operador  $\hat{H}$ , o qual age como um aniquilador da função de onda do Universo  $\Psi$ . Logo,

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial a^2} - 144ka^2 + \frac{24i}{a^{3\alpha-1}} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{24i}{a^{3\beta-1}} \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \Psi(a, \sigma, t) = 0. \quad (4.21)$$

A equação acima tem a forma de uma equação de Schrödinger. Esta é uma consequência do uso do formalismo de Schutz para descrever o conteúdo material do universo. Além disso, o fator de escala do Universo é definido no domínio  $(0, \infty)$ . Isso significa que o operador  $\hat{H}$  não é, em geral, auto-adjunto. Portanto, a fim de garantir uma evolução unitária, o domínio do operador  $\hat{H}$  definido acima deve ser:  $D(\hat{H}) : L^2(\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+; \frac{\partial}{\partial a} \Psi_{(a=0)} = \alpha \Psi_{(a=0)})$ .

Na hipótese de que  $\Psi$  possa ser escrita na forma de uma onda estacionária, tem-se que

$$\Psi(a, \sigma, t) = \psi(a, \sigma) e^{iEt}. \quad (4.22)$$

Logo,

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial a^2} - 144ka^2 - \frac{24E}{a^{3\alpha-1}} + \frac{24i}{a^{3\beta-1}} \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \psi(a, \sigma) = 0. \quad (4.23)$$

Separando as variáveis, busca-se uma solução da forma

$$\psi(a, \sigma) = R(a)\Sigma(\sigma) .$$

Então,

$$-\frac{1}{R(a)}\frac{\partial^2}{\partial a^2}R(a) - 144ka^2 - 24Ea^{1-3\alpha} = -24ia^{1-3\beta}\frac{1}{\Sigma(\sigma)}\frac{\partial}{\partial \sigma}\Sigma(\sigma) . \quad (4.24)$$

Pode-se adotar a solução seguinte para  $\sigma$ :

$$\Sigma(\sigma) = Ae^{-n\sigma} , \quad (4.25)$$

com  $n \in \mathbb{C}$  e  $A$  constantes. Portanto:

$$\frac{d^2R(a)}{da^2} + (144ka^2 + 24Ea^{1-3\alpha} + 24ina^{1-3\beta})R(a) = 0 . \quad (4.26)$$

A análise é agora restrita ao caso  $\alpha = 1/3$ ,  $\beta = 1$  e  $k = 0$ . Com a solução de (4.26), pode-se escrever a solução de (4.21) para a função de onda  $\Psi$  como

$$\Psi_{En}(a, \sigma, t) = \sqrt{a} \left[ CJ_{\frac{\sqrt{1-96in}}{2}}(\sqrt{24Ea}) + DY_{\frac{\sqrt{1-96in}}{2}}(\sqrt{24Ea}) \right] e^{-n\sigma + iEt} , \quad (4.27)$$

com  $C$  e  $D$  constantes. Submetendo a função de onda a condição de contorno  $\Psi(0, \sigma, t) = 0$ , obtém-se

$$\Psi_{En}(a, \sigma, t) = C\sqrt{a}J_{\frac{\sqrt{1-96in}}{2}}(\sqrt{24Ea})e^{-n\sigma + iEt} . \quad (4.28)$$

Apesar das condições de contorno, a função de onda acima não é de quadrado integrável. É necessário construir o pacote de onda superpondo as soluções para diferentes valores de  $E$  e  $n$ . De maneira geral, tem-se que

$$\Psi_{En}(a, \sigma, t) = C\sqrt{a} \int dn g(n) e^{-n\sigma} \int dE f(E) J_{\frac{\sqrt{1-96in}}{2}}(\sqrt{24Ea}) e^{iEt} . \quad (4.29)$$

Adotando  $\sqrt{24E} = q$  e fazendo a escolha

$$f(q) = 12q^{\frac{\sqrt{1-96in}}{2}} e^{-\gamma q^2}, \quad \gamma \in \mathbb{R},$$

pode-se construir o pacote em  $E$ , o qual é escrito em termos de funções exponenciais

$$\Psi_{qn}(a, \sigma, t) = \frac{C\sqrt{a}}{12} \int dn g(n) e^{-n\sigma} \int dq q^{\frac{\sqrt{1-96in}}{2}+1} J_{\frac{\sqrt{1-96in}}{2}}(qa) e^{(-\gamma + \frac{it}{24})q^2}. \quad (4.30)$$

A integral acima pode ser expressa em termos de funções elementares na forma [86]

$$\Psi_n(a, \sigma, t) = \frac{C\sqrt{a}}{2\gamma - \frac{it}{12}} e^{-\frac{a^2}{4\gamma - \frac{it}{6}}} \int dn g(n) e^{-n\sigma} \left( \frac{a}{2\gamma - \frac{it}{12}} \right)^{\frac{\sqrt{1-96in}}{2}}, \quad (4.31)$$

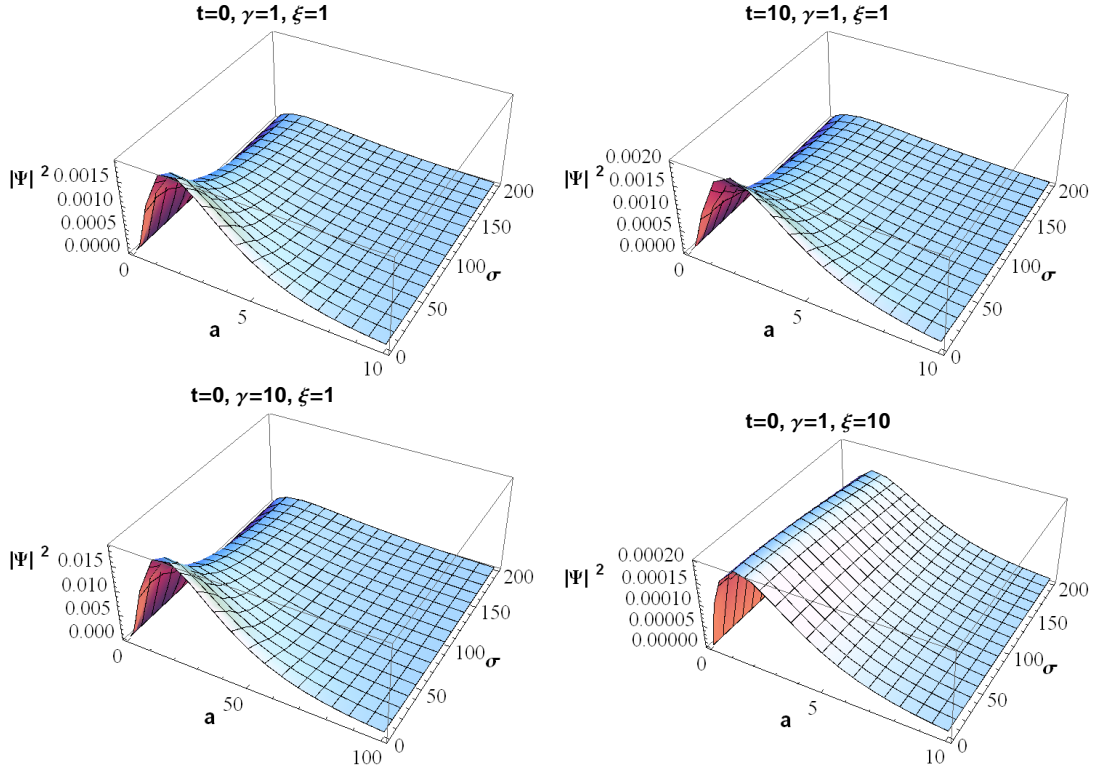
sujeita às condições  $\text{Re}(\gamma - \frac{it}{24}) > 0$  e  $\text{Re}(\frac{\sqrt{1-96in}}{2}) > -1$ . A integral acima pode ser resolvida analiticamente fazendo  $\frac{1-96in}{4} = u^2$  e  $g(n) \rightarrow h(u) = -\frac{e^{-\xi u^2}}{2i\sqrt{6\pi Cu}}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ . Então, pode-se obter

$$\begin{aligned} \Psi(a, \sigma, t) = & \frac{6\sqrt{a}}{(24-it)\sqrt{24\xi-i\sigma}} \left( \frac{12ia}{t+24i\gamma} \right)^{\frac{12}{24\xi-i\sigma}} e^{\frac{i\sigma}{96} - \frac{6a^2}{24\gamma-it}} \left[ 1 + \right. \\ & \left. + \text{erf} \left( \sqrt{\frac{6}{24\xi-i\sigma}} \ln \left( \frac{12ia}{t+24i\gamma} \right) \right) \right], \end{aligned} \quad (4.32)$$

em que  $\text{erf}(x)$  é a função erro, descrita no Apêndice A, a qual não tem forma fechada.

De acordo com as figuras 4.2 e 4.3, é fácil verificar que  $\Psi(a, \sigma, t) \rightarrow 0$  quando o fator de escala tende a zero,  $a \rightarrow 0$ , o que está de acordo com as condições de contorno impostas. Neste caso, definindo a densidade de probabilidade  $P(a) = |\Psi(a)|^2$ , nota-se que  $P(a) \rightarrow 0$  quando  $a \rightarrow 0$  [87] de tal modo que a singularidade observada na versão clássica do modelo, é aparentemente evitada neste caso quântico.

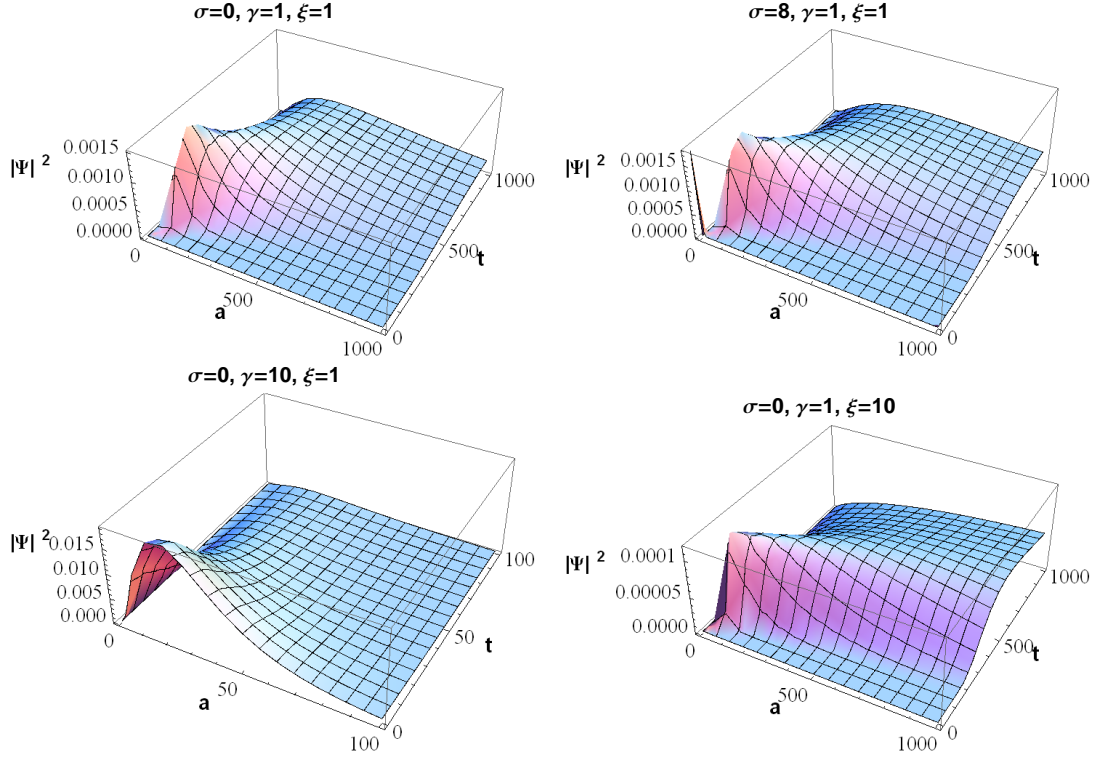
A equação de Wheeler-DeWitt (4.21) é comparável à equação de Schrödinger para uma partícula sujeita a um potencial  $V(a, \sigma)$ . A função de onda  $\Psi(a, \sigma)$  deve ser definida num minissuperespaço bidimensional, a semi-reta  $0 < a < \infty$  e  $-\infty < \sigma < \infty$ . O Universo de FLRW quantizado com dois fluidos é matematicamente equivalente a um problema



**Figura 4.2:** Pacote de onda não normalizado no plano  $a \times \sigma$  para  $t$  fixo com várias combinações dos três parâmetros  $\gamma$  e  $\xi$ .

simples de Mecânica Quântica não relativística - a *partícula* na “posição”  $(a, \sigma)$  representa um universo com estas *coordenadas*. O extremo da função de onda indica um determinado fator de escala  $a$  no qual é mais provável que o Universo seja encontrado. Neste fator de escala, o Universo é ainda quântico, mas se dirige para o regime clássico muito rapidamente, como pode ser observado conforme as figuras (4.2) e (4.3).

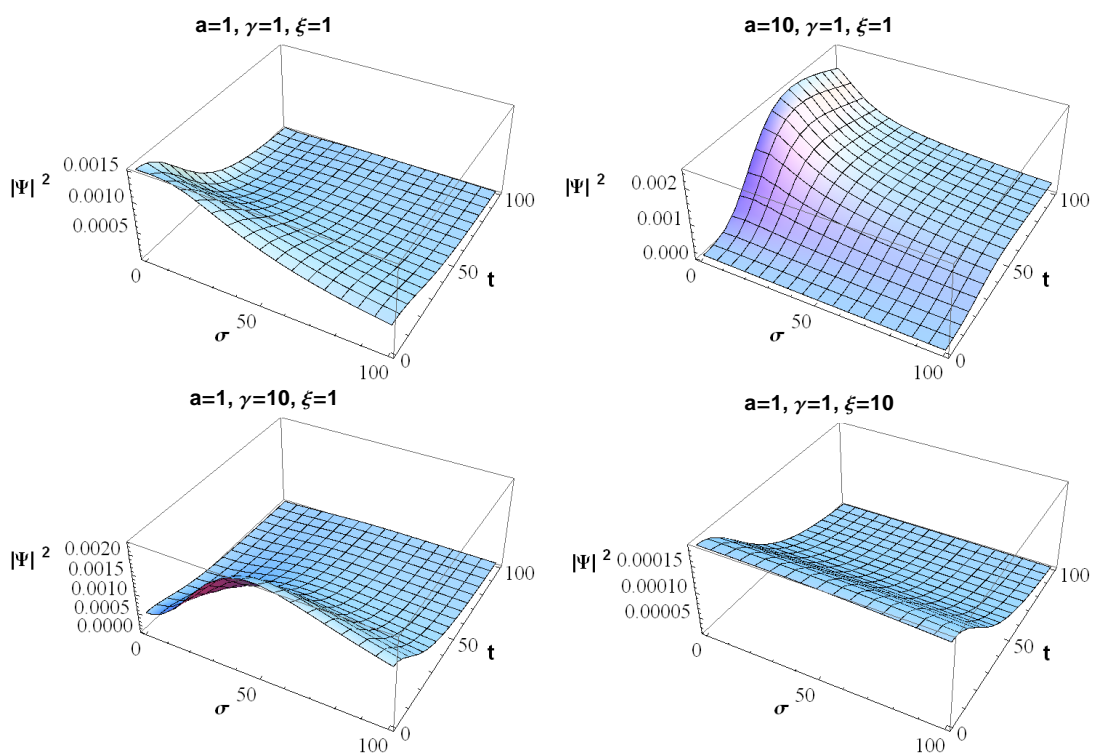
O comportamento do pacote de onda (4.32) é exibido nas figuras 4.2, 4.3 e 4.4 para cada par de variáveis  $a$ ,  $\sigma$  e  $t$ . O pacote vai a 0 à medida que as variáveis crescem, mas a taxa de decréscimo depende dos valores das três variáveis fixas e dos parâmetros  $\gamma$  e  $\xi$ . É importante notar que na equação (4.32) a variável  $t$  aparece muitas vezes acompanhada pelo parâmetro  $\gamma$  enquanto  $\sigma$  aparece juntamente com  $\xi$ . Este fato pode ser usado como uma maneira de regular quão rapidamente os pacotes de onda tendem a zero para as direções  $\sigma$  e  $t$ . Na figura 4.5 é mostrado o corte transversal do pacote de onda, o que permite observar como diferentes combinações de valores para as variáveis e parâmetros



**Figura 4.3:** O pacote de onda não normalizado no plano  $a \times t$  para  $\sigma$  fixo com várias combinações dos três parâmetros  $\gamma$  e  $\xi$ .

podem mudar a intensidade e a posição do pico, bem como sua taxa de decréscimo. A dependência em relação aos parâmetros livres é mostrada na figura 4.6.

O comportamento do pacote de onda, exibido nas figuras (4.2) e (4.3) mostra que  $\Psi(a, \sigma, t)$  tende a zero quando  $a$  tende a zero. Em virtude disso, a densidade de probabilidade  $P(a)$  tende a zero quando  $a$  tende a zero. Isto indica que a singularidade é evitada, em oposição ao que ocorre no caso clássico. Entretanto, uma conclusão precisa acerca da ocorrência ou não da singularidade no modelo exige o cálculo do valor esperado do fator de escala já que, de acordo com a referência [97], a anulação da densidade de probabilidade na origem pode não ser um critério suficiente.



**Figura 4.4:** O pacote de onda não normalizado no plano  $\sigma \times t$  para  $a$  fixo com várias combinações dos três parâmetros  $\gamma$  e  $\xi$ .

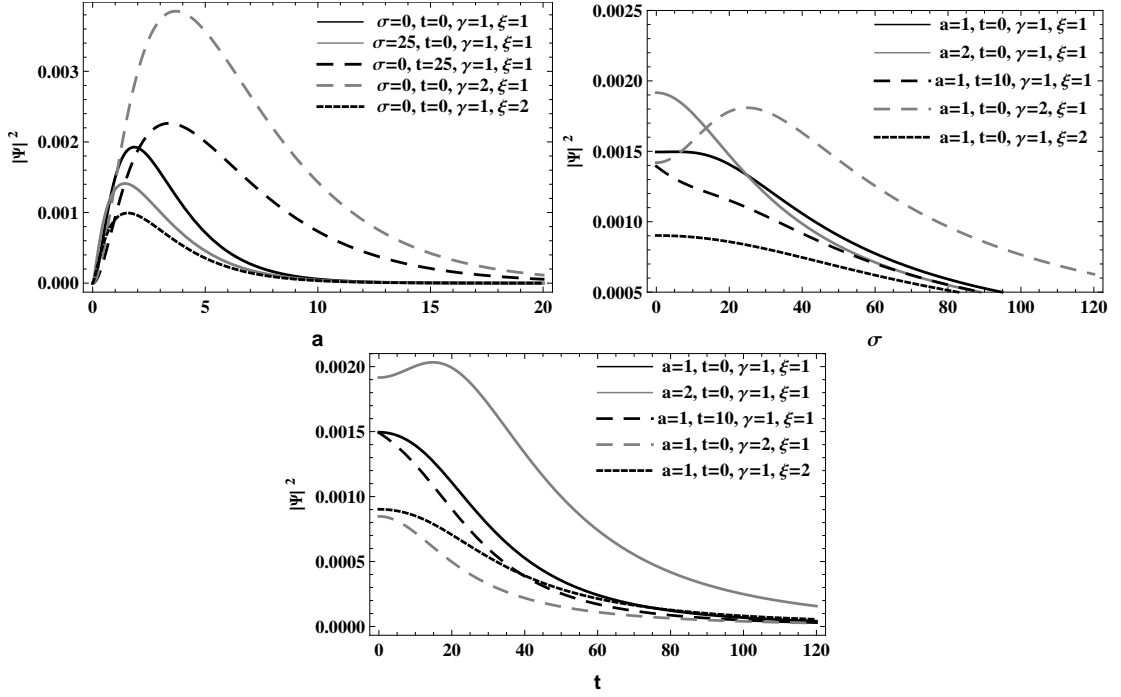


Figura 4.5: O pacote de onda não normalizado como uma função apenas de uma das três variáveis, com as outras duas fixas e para várias combinações dos três parâmetros livres  $\gamma$  e  $\xi$ .

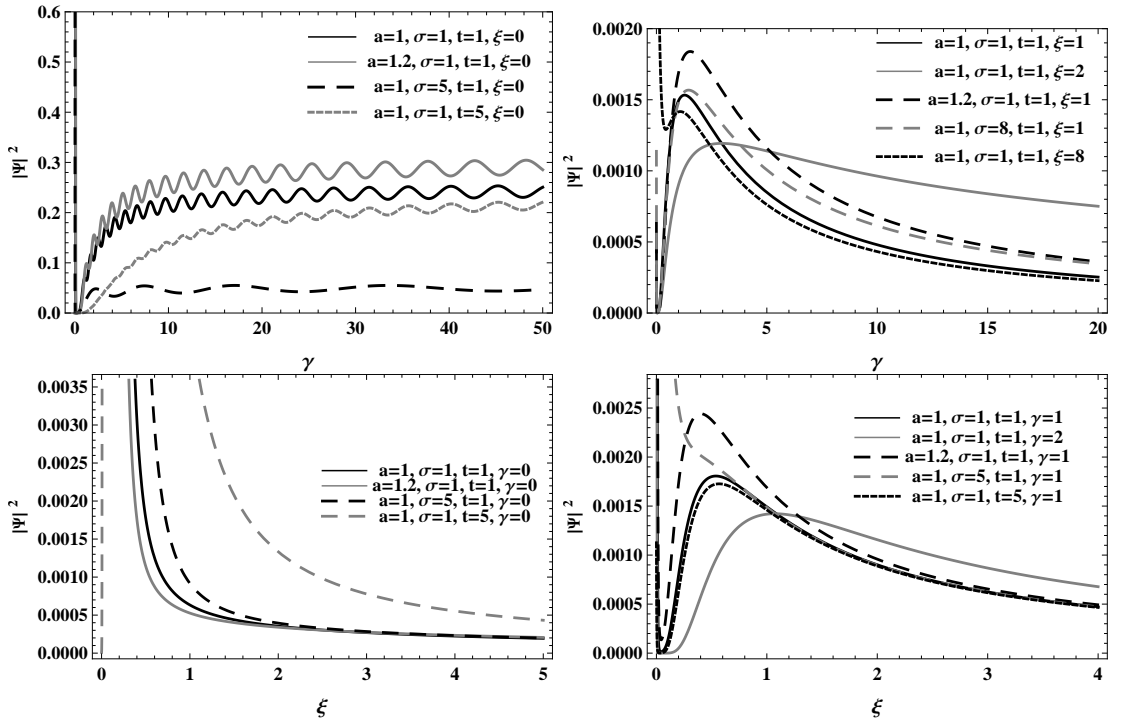


Figura 4.6: A dependência do pacote de onda não normalizado em relação aos parâmetros livres  $\gamma$  e  $\xi$ , para valores fixos das variáveis  $a$ ,  $\sigma$  e  $t$ .

## Capítulo 5

# Modelo cosmológico quântico de Kantowski-Sachs com fluido perfeito

### 5.1 Introdução

À primeira vista pode parecer pouco relevante o estudo de modelos cosmológicos quânticos que levem em conta apenas um número finito de graus de liberdade. Em geral, restringe-se os graus de liberdade apenas àqueles que têm origem geométrica a partir de uma métrica pré-determinada, a partir de rígidas condições de simetria. Em consequência, o tratamento dos vínculos quânticos torna-se tecnicamente mais simples quando escritos em termos das variáveis mais usuais. A imposição de pequenas variações da métrica nas equações de movimento provenientes da ação deve ainda gerar novas soluções clássicas, algumas das quais são instáveis. Dos pontos de vista semiclássico e quântico, os resultados não devem ser exatamente equivalentes aos setores apropriados da teoria completa (isto é, da teoria construída no superespaço). De fato, a construção de uma teoria quântica para a gravidade deve estar relacionada, dentre outros fatores, a obter uma solução para a equação de Wheeler-DeWitt no superespaço. Como consequência, excluir infinitos graus de liberdade não parece ser um procedimento razoável. Contudo, a quantização em minissuperespaço é ainda útil por outras razões. Modelos quânticos em minissuperespaço são sistemas simples e não exigem excessivos esforços técnicos para incorporar



em si as várias simetrias e demais considerações das Relatividade Geral. Além disso, eles proporcionam exemplos não-triviais em que as ideias de gravidade quântica e técnicas matemáticas podem ser aplicadas. Eles são ainda relevantes para a discussão conceitual acerca do problema do tempo, da invariância sob reparametrizações da Relatividade Geral e da interpretação do vínculo Hamiltoniano. Entretanto, todas as discussões citadas possuem aplicações limitadas e a construção de modelos em minissuperespaço não foi ainda capaz de fornecer, para a maior parte delas, respostas consistentes e definitivas. Por exemplo, o problema do tempo em gravidade quântica e em Cosmologia Quântica permanece em aberto [18, 19, 88–90]. De todo modo, mesmo algumas vezes considerando apenas a existência do campo gravitacional, certos aspectos quânticos podem ser esclarecidos. Isto é mais evidente no estudo de propriedades dos buracos negros e no uso de processos de quantização conhecidos, quando aplicados ao Universo como um todo.

Voltando as atenções apenas ao minisperespaço, pode-se questionar quais são os graus de liberdade geométricos responsáveis por assegurar a correta descrição de certos aspectos fundamentais de um modelo cosmológico quântico em suas diferentes fases. A utilização de métricas com graus de liberdade adicionais em relação àqueles presentes nos modelos de FLRW pode fornecer algumas respostas. Entretanto, a descrição dessas geometrias pode ser complexa, especialmente sob o ponto de vista matemático. Como resultado, modelos que representam universos não-homogêneos ou anisotrópicos são pouco explorados quando comparados aos de FLRW. Pode-se citar os modelos de Bianchi, por exemplo [91]. Estes modelos cosmológicos possuem número limitado de soluções analíticas e mesmo a obtenção de soluções numéricas para a equação de Wheeler-DeWitt pode ser um processo complexo.

Neste capítulo, a quantização de um modelo cosmológico no minissuperespaço descrito pela métrica de Kantowski-Sachs [22] é estudado, sendo o papel do conteúdo material atribuído a um fluido perfeito descrito pelo formalismo de Schutz, o que permite, conforme já mencionado neste trabalho, relacionar o tempo aos graus de liberdade do fluido. Em particular, utiliza-se um fluido de matéria rígida, o qual possui relevância em certos cenários cosmológicos primitivos [51].

O espaço-tempo governado pela métrica de Kantowski-Sachs [31] constitui um modelo

menos complexo que aquele descrito por outras métricas anisotrópicas. Ele representa uma geometria anisotrópica e homogênea. Pode-se questionar a relevância de modelos anisotrópicos do ponto de vista observacional, uma vez que hoje o Universo parece ser homogêneo e isotrópico. Contudo, não há razão, *a priori*, para acreditar que o universo tenha sido sempre assim. Em tempos remotos, processos de isotropização de natureza quântica ou mesmo de natureza termodinâmica [92] podem ter ocorrido num espaço-tempo essencialmente menos regular. Neste sentido, o estudo de modelos anisotrópicos no Universo primordial, onde os efeitos quânticos eram relevantes, é justificado.

O espaço-tempo de Kantowski-Sachs possui algumas qualidades interessantes. Primeiro, suas soluções clássicas são conhecidas em diferentes contextos, assim como as soluções quânticas para alguns cenários específicos [31, 93–95]. Além disso, a métrica de Kantowski-Sachs pode coincidir com o caso de vácuo na solução de Schwarzschild para buracos negros. Pode ainda descrever o interior de buracos negros, sendo usada para discutir seus estados quânticos e sua entropia. De fato, uma métrica de Kantowski-Sachs minimamente acoplada a um campo escalar homogêneo não massivo constitui um modelo de minissuperespaço para qual um conjunto completo de soluções do tipo *wormholes* são conhecidas [96]. Modelos de Kantowski-Sachs podem finalmente ser interessantes para estudar o comportamento de modelos cosmológicos quânticos com graus de liberdade adicionais e podem sugerir modificações nos métodos de quantização aplicados à Cosmologia. Por exemplo, em [23], a quantização em minissuperespaço do modelo descrito pela métrica de Bianchi I revela uma surpreendente discrepância entre as interpretações de Bohm-de Broglie e de vários mundos da Mecânica Quântica: o modelo quântico é não unitário e a norma da função de onda torna-se dependente do tempo. Possivelmente a análise de outros modelos quânticos anisotrópicos pode ajudar a explicar a anomalia encontrada. Em geral, a condição de que o operador seja auto-adjunto é suficiente para garantir um comportamento espectral, como unitariedade, apropriado ao sistema quântico. O aparecimento de anomalias em funções associadas a operadores auto-adjuntos deve indicar que há outros aspectos matemáticos relevantes que precisam ser levados em conta no processo de construção dos modelos cosmológicos quânticos e que estão para além da análise espectral.

Em particular, existe a suspeita que mesmo o procedimento de construção do pacote de onda pode introduzir tais anomalias.

Aqui, são aplicados os mesmos procedimentos das investigações realizadas em modelos cosmológicos quânticos isotrópicos com fluido perfeito [23, 97–101] para quantizar o modelo com métrica de Kantowski-Sachs. A equação de Wheeler-DeWitt é resolvida para o minissuperespaço e a função de onda é obtida. Novamente, o tempo é introduzido fenomenologicamente através da adição de graus de liberdade associados ao fluido de matéria rígida.

## 5.2 O modelo cosmológico quântico: a escolha do tempo e a equação de Wheeler-DeWitt

Neste modelo um Universo plano, homogêneo e anisotrópico descrito pela métrica de Kantowski-Sachs é considerado. De acordo com [102] o espaço-tempo de Kantowski-Sachs não é um espaço-tempo em si mesmo, mas apenas parte de um. Esta restrição se aplica ao modelo de vácuo, mas desaparece se um fluido perfeito é acoplado à gravidade. Aqui, o formalismo de Schutz é utilizado para descrever o fluido perfeito, o que permite resolver dois problemas: o primeiro, descrito acima, e o problema da ausência de uma variável capaz de reintroduzir a noção de tempo em modelos cosmológicos quânticos.

### 5.2.1 Espaço de fase e Hamiltoniana do modelo de Kantowski-Sachs

A ação de Einstein-Hilbert com a adição de um termo de contorno é escrita como

$$S_g = \int_M d^4x \sqrt{-g} R + 2 \int_{\partial M} d^3x \sqrt{h} K \quad , \quad (5.1)$$

em que  $R$  é o escalar de curvatura, tomado como uma função de  $g^{\mu\nu}$  e suas derivadas,  $K = h_{ab} K^{ab}$  tal que  $K_{ab}$  é a curvatura extrínseca e  $h_{ab}$  é a métrica induzida sobre a hipersuperfície tridimensional, a qual é o contorno  $\partial M$  da variedade quadridimensional  $M$ . O

fator  $16\pi G$  é feito igual a 1 no primeiro termo da equação (5.1), em que  $G$  é a constante gravitacional de Newton.

Considera-se o modelo de um Universo que é homogêneo mas anisotrópico. Este cenário pode ter sua geometria descrita por um elemento de linha cuja forma é [93]

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + a(t)^2 dr^2 + b(t)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad , \quad (5.2)$$

em que  $a(t)$  e  $b(t)$  são os fatores de escala e  $N(t)$  denota a função lapso. A relação (5.2) define a métrica de Kantowski-Sachs [31]. Nas referências [93, 103, 104] a estrutura global dos modelos cosmológicos de Kantowski-Sachs é discutida em detalhes. O escalar de Ricci,  $R$ , calculado para esta métrica fica escrito como

$$R = 2 \frac{\ddot{a}}{N^2 a} + \frac{4}{N^2} \frac{\ddot{b}}{b} - 2 \frac{\dot{N}}{N^3} \dot{a} a - 4 \frac{\dot{N}}{N^3} \frac{\dot{b}}{b} + \frac{4}{N^2} \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} + \frac{2}{N^2} \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{2}{N^2} \quad , \quad (5.3)$$

e a curvatura extrínseca,  $K$ , é dada por

$$K = -\frac{1}{N} \left( \frac{\dot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{b}}{b} \right) \quad . \quad (5.4)$$

Substituindo as equações (5.3) e (5.4) na ação de Einstein-Hilbert, (5.1), obtém-se a seguinte expressão

$$S_g = \int dt \left( 2Na - \frac{4\dot{a}\dot{b}\dot{b}}{N} - \frac{2a\dot{b}^2}{N} \right) \quad . \quad (5.5)$$

Há dois tipos de singularidade nesta geometria: do tipo charuto, quando, when  $b \rightarrow 0$  e do tipo disco, quando  $a \rightarrow 0$  [93]. Contudo, a curvatura da hipersuperfície  ${}^3R = \frac{2}{b^2}$  é divergente para a primeira delas. Devido à ausência de matéria, a singularidade do tipo disco, deixa de ter um sistema de coordenadas que satisfaz a regra da mão direita e obedece à regra da mão esquerda. Isso é uma indicação da incompletude do espaço-tempo de Kantowski-Sachs no vácuo [93, 102]. O modelo deve ser completado adicionando matéria, por exemplo a matéria rígida utilizada neste trabalho.

Com a ação da gravitação (5.5), a Lagrangiana associada ao campo gravitacional do

modelo de Kantowski-Sachs é dada por

$$L_g = -\frac{\dot{a}b\dot{b}}{N} - \frac{ab^2}{2N} + \frac{Na}{2} \quad .$$

A fim de facilitar o tratamento matemático do problema, propõe-se a seguinte reparametrização [93]:

$$b \rightarrow \frac{c}{a}; \quad \dot{b} = \frac{\dot{c}}{a} - \frac{\dot{a}c}{a^2} \quad .$$

Logo, a Lagrangiana puramente gravitacional é escrita como

$$L_g = \frac{Na}{2} + \frac{\dot{a}^2 c^2}{2Na^3} - \frac{\dot{c}^2}{2Na} \quad . \quad (5.6)$$

Usando o formalismo canônico, a Hamiltonina associada a expressão acima assume a forma seguinte:

$$H_g = \frac{a}{2c^2} [a^2 p_a^2 - c^2 p_c^2 - c^2] \quad . \quad (5.7)$$

O conteúdo material do Universo é descrito através de um fluido perfeito introduzido via formalismo de Schutz. Conforme tratado no Capítulo 3, a ação do fluido pode ser escrita como:

$$S_f = \int d^4x \sqrt{-g} p \quad , \quad (5.8)$$

em  $p$  é a pressão, a qual está associada com a densidade de energia pela equação de estado  $p = \alpha \rho$ . Além disso, a densidade de energia e a pressão são dadas por

$$\rho = \left( \frac{\mu}{\alpha + 1} \right)^{1+\frac{1}{\alpha}} e^{-\frac{s}{\alpha}}; \quad p = \alpha \left( \frac{\mu}{\alpha + 1} \right)^{1+\frac{1}{\alpha}} e^{-\frac{s}{\alpha}} \quad . \quad (5.9)$$

Ainda,

$$\mu = \frac{1}{N} (\dot{\phi} + \theta \dot{S}) \quad . \quad (5.10)$$

Usando as equações (5.9) e (5.10) na ação (5.8) e impondo a métrica de Kantowski-

Sachs, obtém-se a seguinte Lagrangiana do fluido:

$$L_f = \frac{c^2}{a} N^{-1/\alpha} \frac{\alpha}{(\alpha+1)^{1+1/\alpha}} (\dot{\phi} + \theta \dot{S})^{1+1/\alpha} e^{-S/\alpha} . \quad (5.11)$$

Os momentos conjugados associados às variáveis que descrevem o fluido são obtidos da expressão acima. Assim,

$$\begin{aligned} p_\phi &= \frac{c^2}{a} N^{-1/\alpha} \frac{1}{(\alpha+1)^{1/\alpha}} (\dot{\phi} + \theta \dot{S})^{1/\alpha} e^{-S/\alpha} , \\ p_S &= \theta p_\phi , \\ p_\theta &= 0 , \end{aligned} \quad (5.12)$$

e novamente pelo formalismo canônico, pode-se escrever

$$H_f = \left( \frac{a}{c^2} \right)^\alpha e^S p_\phi^{\alpha+1} . \quad (5.13)$$

Esta expressão pode ser escrita de modo mais sugestivo através da seguinte transformação canônica

$$T = p_S e^{-S} p_\phi^{-(\alpha+1)} , \quad p_T = p_\phi^{(\alpha+1)} e^S ; \quad \bar{\phi} = \phi - (\alpha+1) \frac{p_S}{p_\phi} , \quad \bar{p}_\phi = p_\phi . \quad (5.14)$$

Assim, a super-Hamiltoniana (5.13) pode ser escrita em sua forma final:

$$H_f = \left( \frac{a}{c^2} \right)^\alpha p_T . \quad (5.15)$$

O tempo introduzido através do formalimo de Schutz é um tempo de fase global. De fato, para ser um tempo de fase global, a função deve ser monótona crescente, definida no espaço de fase e satisfazendo a relação

$$[t, H] > 0 . \quad (5.16)$$

Em particular, o tempo introduzido nas equações (5.14) e (5.15) é um tempo extrínseco,

uma vez que é definida no espaço de fase e apresenta estrutura  $t(q_i, p_i)$ . Entretanto, se a função tem a forma  $t(q_i)$ , então é chamada de tempo intrínseco [18]. A ideia de um tempo de fase global em universos anisotrópicos deste tipo é tratada na referência [94]. É possível, em certos contextos, conectar o tempo com os aspectos puramente geométricos da teoria. No Universo de Kantowski-Sachs, trata-se de um tempo de fase global se, através de algumas transformações de calibre, for possível impor a relação  $[t, H] > 0$ .

A Hamiltoniana total  $H = H_g + H_f$  é obtida a partir das equações (5.7) e (5.15). Assim, tem-se que

$$H = \frac{a}{2c^2} \left[ a^2 p_a^2 - c^2 p_c^2 - c^2 + 2 \left( \frac{a}{c^2} \right)^{\alpha-1} p_T \right] . \quad (5.17)$$

O momento conjugado  $p_T$  associado à matéria aparece linearmente em  $H$ , de modo que, após a quantização, uma equação tipo Schrödinger pode ser obtida com as variáveis associada à matéria fazendo o papel de tempo na teoria. Desse modo, todas as ferramentas da Mecânica Quântica convencional podem ser, a princípio, aplicadas a fim de obter previsões acerca da evolução do Universo.

### 5.2.2 Quantização do modelo

Como usual, o modelo de Kantowski-Sachs é quantizado seguindo o esquema de quantização de Dirac transformando os momentos  $p_a$ ,  $p_c$  e  $p_T$  em operadores, os quais obedecem às relações de comutação básicas:

$$p_a \rightarrow \hat{p}_a = -i \frac{\partial}{\partial a}; \quad p_c \rightarrow \hat{p}_c = -i \frac{\partial}{\partial c}; \quad p_T \rightarrow \hat{p}_T = -i \frac{\partial}{\partial T} .$$

O emprego da formulação Hamiltoniana da Relatividade Geral (Capítulo 2) e a introdução do tempo na teoria através do formalismo de Schutz permite reduzir a equação de Wheeler-DeWitt a uma equação tipo Schrödinger, cuja solução é interpretada como a função de onda do Universo. Com este fim, a Hamiltoniana (5.17) torna-se um operador, o qual aniquila os estados físicos:  $H = 0 \rightarrow \hat{H}\Psi = 0$ . Usando a nova reparametrização

temporal  $t \rightarrow 2T$  obtém-se a seguinte equação de Wheeler-DeWitt

$$\left(-a^2 \frac{\partial^2}{\partial a^2} + c^2 \frac{\partial^2}{\partial c^2} - c^2 + i \left(\frac{a}{c^2}\right)^{\alpha-1} \frac{\partial}{\partial t}\right) \Psi(a, c, t) = 0 \quad . \quad (5.18)$$

Funções no espaço de fase clássico da teoria comutam. Contudo, os operadores associados definidos acima no espaço de Hilbert, em geral, não comutam. Como resultado, o ordenamento segundo o qual o produto de dois operadores é escrito torna-se significativo. O modo mais imediato de escrever o operador é aquele que garante sua simetria, a qual é um pré-requisito para garantir que seja auto-adjunto e, portanto, tenha o caráter de um observável físico. Uma discussão adequada acerca da auto-adjuntice do operador pode ser encontrada na referência [41]. Tem-se então que,

$$(\hat{H}\psi, \phi) = (\psi, \hat{H}\phi) \quad . \quad (5.19)$$

Propõe-se um ordenamento com a seguinte forma:

$$a^2 \partial_a^2 \rightarrow a^2 \partial_a^2 + q_a \partial_a = X \quad . \quad (5.20)$$

Resta determinar  $q_a$ . O produto interno  $(\psi, X\phi)$  é, por definição, escrito como

$$(\psi, X\phi) = \int \psi^* (a^2 \partial_a^2 + q_a \partial_a) \phi \, da \quad . \quad (5.21)$$

Após algumas integrações por partes, é possível escrever

$$(\psi, X\phi) = \int \psi^* (a^2 \partial_a^2 + 2a \partial_a) \phi \, da = (X\psi, \phi) \quad , \quad (5.22)$$

e similarmente, se

$$c^2 \partial_c^2 \rightarrow c^2 \partial_c^2 + q_c \partial_c = Y \quad , \quad (5.23)$$

tem-se que

$$(\psi, Y\phi) = \int \psi^* (c^2 \partial_c^2 + 2c \partial_c) \phi \, dc = (Y\psi, \phi) \quad , \quad (5.24)$$



em que  $q_a = 2a$ , na equação (5.22), e  $q_c = 2c$ , na equação (5.24), asseguram a hermiticidade de  $\hat{H}$  e a positividade do produto interno de Schrödinger. Uma discussão mais detalhada pode ser encontrada em [94]. Com este novo ordenamento, a equação de Wheeler-DeWitt pode ser agora reescrita como

$$\left[ -a^2 \frac{\partial^2}{\partial a^2} - 2a \frac{\partial}{\partial a} + c^2 \frac{\partial^2}{\partial c^2} + 2c \frac{\partial}{\partial c} - c^2 + i \left( \frac{a}{c^2} \right)^{\alpha-1} \frac{\partial}{\partial t} \right] \Psi(a, c, t) = 0 \quad . \quad (5.25)$$

Note que a assinatura do termo cinético é hiperbólica, algo que frequentemente é observado em modelos anisotrópicos. Na hipótese de soluções estacionárias,  $\Psi(a, c, t) = \psi(a, c) e^{-iEt}$ , pode-se escrever

$$\left[ c^2 \frac{\partial^2}{\partial c^2} + 2c \frac{\partial}{\partial c} - c^2 - a^2 \frac{\partial^2}{\partial a^2} - 2a \frac{\partial}{\partial a} \right] \psi(a, c) = E \left( \frac{a}{c^2} \right)^{\alpha-1} \psi(a, c) \quad . \quad (5.26)$$

Soluções analíticas para esta equação podem ser obtidas apenas para o caso particular em que  $\alpha = 1$  (matéria rígida). Além das razões já apresentadas, este caso é adequado para checar a conexão do formalismo de Schutz com modelos equipados com métricas anisotrópicas. Então, com  $\alpha = 1$ , tem-se que

$$\left( c^2 \frac{\partial^2}{\partial c^2} + 2c \frac{\partial}{\partial c} - c^2 - a^2 \frac{\partial^2}{\partial a^2} - 2a \frac{\partial}{\partial a} - E \right) \psi(a, c) = 0 \quad . \quad (5.27)$$

Os operadores  $a^2 \partial_a^2 + 2a \partial_a$  e  $c^2 \partial_c^2 + 2c \partial_c$  em  $L^2(0, \infty)$  são unitariamente equivalentes aos operadores  $\partial_a^2$  e  $\partial_c^2$  em  $L^2(-\infty, \infty)$  [111], os quais são auto-adjuntos (de fato, se dois operadores,  $A$  e  $B$ , são unitariamente equivalentes,  $B$  goza de todas as propriedades espectrais de que dispõe  $A$ ). Este mapeamento é definido pela transformação

$$\tilde{\psi}(x, y) = e^{-x/2-y/2} \psi(e^{-x}, e^{-y}) \quad ,$$

em que  $a = e^{-x}$  e  $c = e^{-y}$ . Sendo assim, a equação (5.27) é modificada para

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - e^{-2y} \right) \tilde{\psi}(x, y) = E \tilde{\psi}(x, y) \quad , \quad (5.28)$$

em que assume-se  $E > 0$ .

Aplicando o método de separação de variáveis, supõe-se que

$$\tilde{\Psi}(x, y) = X(x)Y(y) \quad , \quad (5.29)$$

que leva às equações

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\lambda^2 \quad , \quad (5.30)$$

em que  $-\lambda^2$  é a constante de separação e,

$$\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - (\sigma^2 + e^{-2y}) = 0 \quad , \quad (5.31)$$

com  $\sigma^2 = E - \lambda^2$ .

Uma solução mais geral para a função de onda do Universo segue das equações acima. Então, pode-se escrever que

$$\Psi_{\lambda\sigma}(x, y, t) = [A_1 \sin(\lambda x) + A_2 \cos(\lambda x)] [B_1 I_\sigma(e^{-y}) + B_2 K_\sigma(e^{-y})] e^{-i(\lambda^2 + \sigma^2)t} \quad , \quad (5.32)$$

em que  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  e  $B_2$  são constantes de integração,  $I_\sigma$  e  $K_\sigma$  são funções de Bessel modificadas e assume-se que  $\sigma \in \mathbb{C}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Tendo esta solução geral, é necessário investigar sob que circunstâncias a função de onda acima satisfaz as condições de contorno, isto é,  $\Psi(a, c, t) = 0$  (quando  $a \rightarrow 0$  e  $c \rightarrow 0$ ). Sob esta restrição, obtém-se a seguinte função de onda

$$\Psi_{\lambda\sigma}(x, y, t) = K_\sigma(e^{-y}) e^{\pm i\lambda x} e^{-i(\lambda^2 + \sigma^2)t} \quad . \quad (5.33)$$

Com as condições de contorno, os pacotes de onda podem ser construídos através de superposições sobre valores de  $\lambda$  e  $\sigma$ . A estrutura geral destas superposições é

$$\Psi(x, y, t) = \int_0^\infty \int_0^\infty C(\lambda, \sigma) e^{-i\lambda x} K_\sigma(e^{-y}) e^{-i\lambda^2 t} e^{-i\sigma^2 t} d\lambda d\sigma \quad . \quad (5.34)$$

Note que se  $C(\lambda, \sigma) = C_1(\lambda)C_2(\sigma)$  a equação acima admite a seguinte fatorização

$$\Psi(x, y, t) = \mathcal{J}_\sigma(x, t) \mathcal{J}_\lambda(y, t), \quad (5.35)$$

em que

$$\mathcal{J}_\lambda = \int_0^\infty C_1(\lambda) e^{-i(\lambda^2 t + \lambda x)} d\lambda, \quad (5.36)$$

$$\mathcal{J}_\sigma = \int_0^\infty C_2(\sigma) K_\sigma(e^{-y}) e^{-i\sigma^2 t} d\sigma. \quad (5.37)$$

Para a integral (5.36), adota-se que  $C_1(\lambda) = e^{-i\lambda^2 t_0}$  e  $\lambda^2 t + \lambda x = (\lambda \sqrt{t+t_0} + \frac{x}{2\sqrt{t+t_0}})^2 - \frac{x^2}{4(t+t_0)}$ . Com isso, pode-se escrever

$$\mathcal{J}_\lambda = e^{-i\frac{x^2}{4(t+t_0)}} \int_0^\infty \left\{ \cos \left[ \left( \lambda \sqrt{t+t_0} + \frac{x}{2\sqrt{t+t_0}} \right)^2 \right] - i \sin \left[ \left( \lambda \sqrt{t+t_0} + \frac{x}{2\sqrt{t+t_0}} \right)^2 \right] \right\} d\lambda, \quad (5.38)$$

em que  $t_0$  é uma constante arbitrária. Introduzindo a variável  $u = \lambda \sqrt{t+t_0} + \frac{x}{2\sqrt{t+t_0}}$ , a integral (5.38) toma a forma

$$\mathcal{J}_\lambda = \frac{e^{-i\frac{x^2}{4(t+t_0)}}}{\sqrt{t+t_0}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{t+t_0}}}^\infty (\cos u^2 - i \sin u^2) du, \quad (5.39)$$

a qual tem solução dada por

$$\mathcal{J}_\lambda = \frac{e^{-i\frac{x^2}{4(t+t_0)}}}{\sqrt{t+t_0}} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \left\{ \left[ 1 - 2C \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x}{2\sqrt{t+t_0}} \right) \right] - i \left[ 1 - 2S \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x}{2\sqrt{t+t_0}} \right) \right] \right\}, \quad (5.40)$$

em que  $C$  e  $S$  são integrais de Fresnel

$$C(z) = \int_0^z \cos \left( \frac{\pi}{2} \theta^2 \right) d\theta, \quad (5.41)$$

$$S(z) = \int_0^z \sin \left( \frac{\pi}{2} \theta^2 \right) d\theta. \quad (5.42)$$

Para a densidade de probabilidade, pode-se escrever

$$|\mathcal{I}_\lambda|^2 = \frac{\pi}{4(t+t_0)} \left\{ 1 + 2 \left[ C \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{x}{\sqrt{t+t_0}} \right) \left( C \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{x}{\sqrt{t+t_0}} \right) - 1 \right) + S \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{x}{\sqrt{t+t_0}} \right) \left( S \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{x}{\sqrt{t+t_0}} \right) - 1 \right) \right] \right\}. \quad (5.43)$$

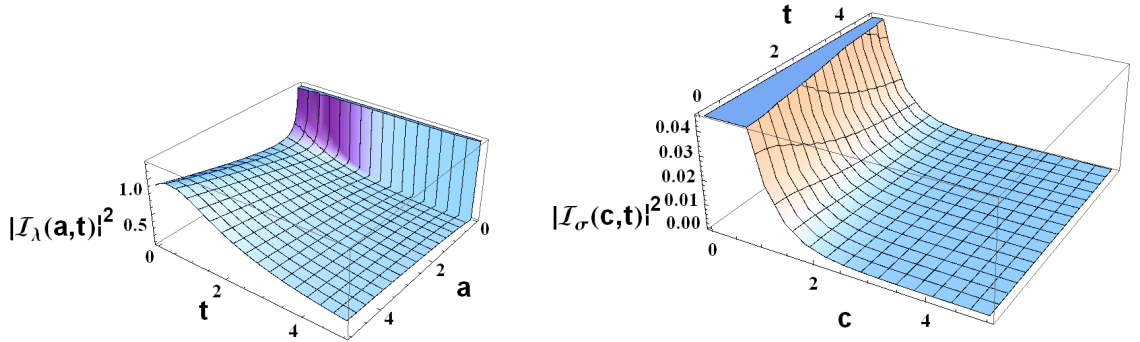
Um procedimento similar pode ser empregado para resolver a integral (5.37). Colocando a função de Bessel na forma integral,

$$K_\sigma(c) = \int_0^\infty e^{-c \cosh z} \cosh i\sigma z dz, \quad (5.44)$$

e introduzindo  $C_2(\sigma) = e^{-i\sigma^2 t_0}$  e  $u_\pm = \sigma \sqrt{t+t_0} \pm \frac{z}{2\sqrt{t+t_0}}$ , obtém-se que

$$\mathcal{I}_\sigma = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{(1-i)}{\sqrt{t+t_0}} \int_0^\infty e^{-c \cosh z + i \frac{z^2}{4(\sqrt{t+t_0})}} dz. \quad (5.45)$$

As expressões encontradas para  $|\mathcal{I}_\lambda|^2$  e  $|\mathcal{I}_\sigma|^2$  são graficamente expressas na figura 5.1.



**Figura 5.1:** O comportamento de  $|\mathcal{I}_\lambda|^2$ , a qual é fornecida pela equação (5.43), e  $|\mathcal{I}_\sigma|^2$ , que é obtida da equação (5.45). Aqui, adota-se  $t_0 = 1.5$ .

Os gráficos relevantes para a função densidade de probabilidade não-normalizada são apresentados nas figuras 5.2, 5.3 e 5.4. Além disso, o cálculo da norma revela sua dependência temporal. Sendo assim a evolução é não-unitária, o que também é verificado no contexto do modelo de Bianchi I [23]. Enquanto este resultado pode reforçar a evidência de uma incompatibilidade entre geometrias anisotrópicas e o formalismo de Schutz em modelos cosmológicos quânticos, deve-se observar que, de acordo com a equação (5.28)

o operador associado com a função de onda obtida é auto-adjunto. Como as condições iniciais estão bem estabelecidas, lança-se a suspeita de que a não conservação da norma da função de onda possa ter origem no pacote de onda que foi construído. Embora o pacote de onda não seja nada além de uma superposição de funções de onda planas, é possível que certas escolhas não sejam adequadas para localizar a solução numa região finita do espaço. Isto pode explicar a ocorrência de patologias verificadas no contexto de certos modelos cosmológicos quânticos. O pacote de onda poderia ter sido construído de outras maneiras, o que significa outras escolhas para  $C_1(\lambda)$  e  $C_2(\sigma)$ . As escolhas feitas aqui permitem encontrar uma expressão analítica para a função de onda que, embora útil, pode não conduzir a uma descrição física fiel.

O resultado acima pode ser confrontado com o exposto na referência [112] onde pôde-se obter uma evolução unitária para o mesmo modelo, tendo o conteúdo material também descrito pelo formalismo de Schutz, aplicando entretanto um ordenamento diferente no processo de quantização. Embora o autor sugira que este fato demonstre que as patologias verificadas não têm necessariamente ligação com o caráter anisotrópico do métrica, pode-se argumentar que as dificuldades matemáticas encontradas estão relacionadas ao fato de que os operadores Hamiltonianos associados a este tipo de modelo apresentam assinatura do termo cinético hiperbólica, o que exige uma análise espectral mais delicada, o que torna necessário recorrer a outros ordenamentos para garantir uma evolução unitária ou mesmo ao estabelecimento de extensões auto-adjuntas [41]. Além disso, a anisotropia do modelo deve exigir uma discussão criteriosa acerca da orientação do sentido do tempo [113].

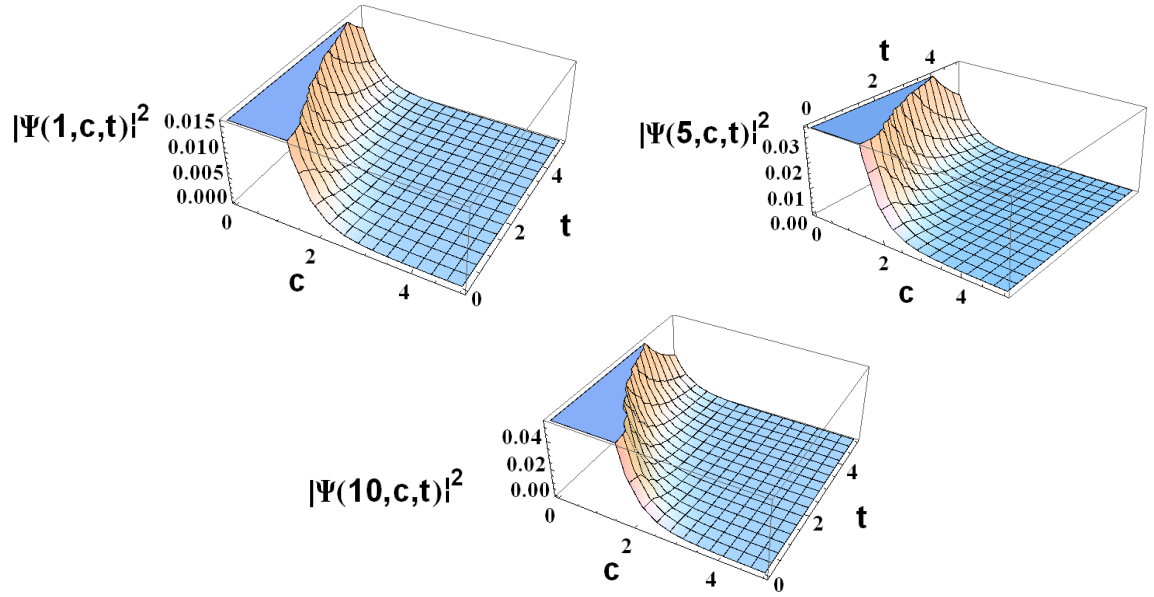


Figura 5.2: Pacote de onda como uma função de  $c$  e  $t$ , para  $a = 0, 5, 10$  e  $t_0 = 1.5$ .

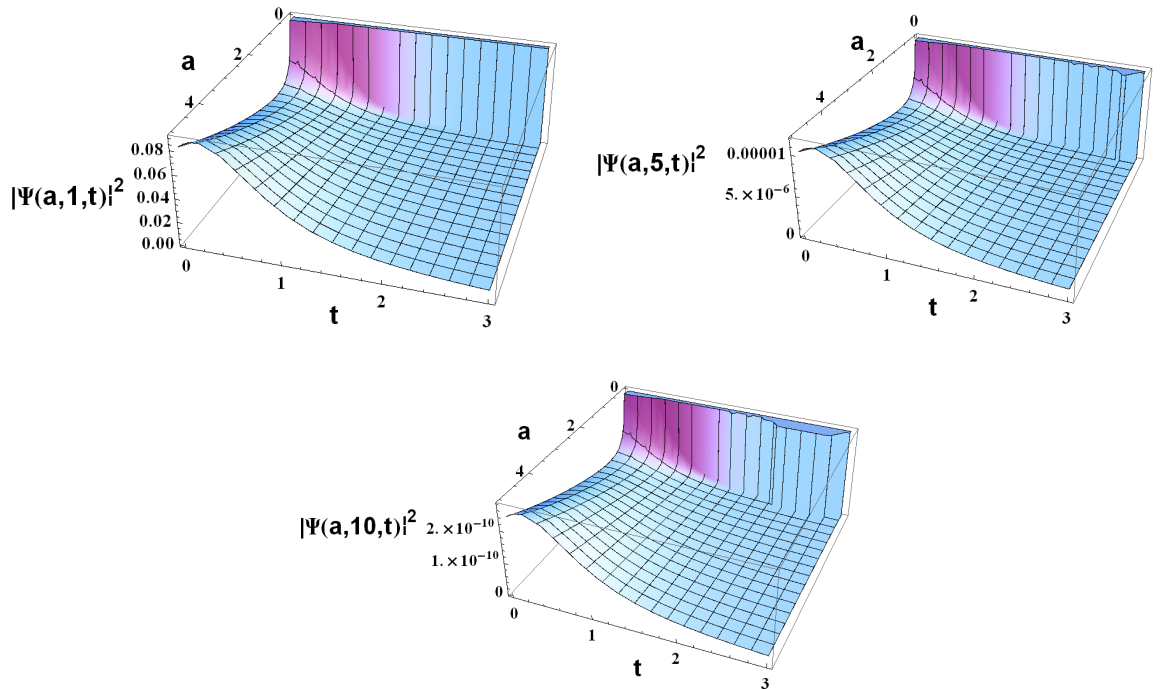
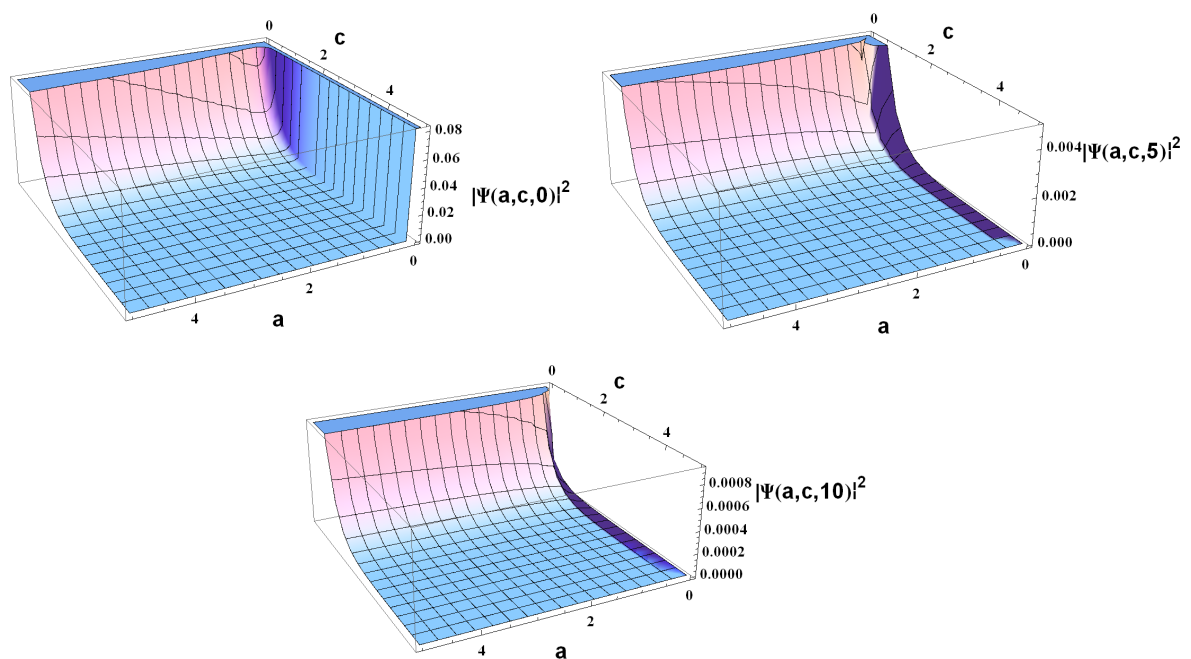


Figura 5.3: Pacote de onda como uma função de  $a$  e  $t$ , para  $c = 0, 5, 10$  e  $t_0 = 1.5$ . Observa-se neste caso que  $|\Psi|^2$  cresce com  $a$ .



**Figura 5.4:** Pacote de onda como uma função de  $a$  e  $c$ , para  $t = 0, 5, 10$  e  $t_0 = 1.5$ .

## Capítulo 6

### Conclusões e perspectivas

Convencionalmente, modelos cosmológicos quânticos em minissuperespaço levam em conta os graus de liberdade associados a uma geometria isotrópica e, eventualmente, certos campos acoplados à gravitação. Neste trabalho, a introdução de graus de liberdade adicionais foi proposta a partir da utilização de um fluido perfeito acoplado à gravitação, descrito pelo formalismo de Schutz. No Capítulo 3, esta técnica, baseada na descrição de um fluido relativístico a partir de potenciais-velocidade, foi detalhadamente descrita. Observou-se a existência de uma aparente analogia entre a Hamiltoniana que descreve um Universo isotrópico preenchido por um fluido perfeito descrito pelo formalismo de Schutz e aquela obtida a partir da ação modificada da gravitação proposta por Hořava-Lifshitz, para o caso de um fluido de matéria rígida. O resultado é curioso, tendo em vista que ambas as construções tem fundamentos consideravelmente distintos.

As conclusões verificadas no Capítulo 3 motivaram o estudo de um modelo de FLRW com matéria rígida e um segundo fluido, radiação, no Capítulo 4. No modelo clássico, o Universo com curvatura nula se expande para sempre a partir de uma singularidade inicial. Já no caso quântico, a equação de Wheeler-DeWitt neste minissuperespaço foi resolvida, tendo como resultado a função de onda que descreve este cenário. Além disso, ao contrário do modelo clássico, no cenário quântico a singularidade inicial pode ter sido evitada, o que é sugerido pelo fato de que a função de onda  $\Psi(a, \sigma, t)$  tende a zero quando o fator de escala  $a$  tende a zero. Desse modo, a densidade de probabilidade  $P(a)$  tende a



zero quando  $a$  vai a zero.

No Capítulo 5 o modelo cosmológico quântico de Kantowski-Sachs foi estudado. O conteúdo material utilizado foi um fluido perfeito de matéria rígida, descrito pelo formalismo de Schutz, o que, mais um vez, permitiu escrever o tempo de forma explícita na equação de Wheeler-DeWitt associada ao modelo. Contudo, o modelo é não-unitário, uma vez que norma da função de onda é dependente do tempo, o que já havia sido observado no contexto do modelo cosmológico quântico, também anisotrópico, de Bianchi I [23]. A garantia de que o operador associado ao modelo fosse auto-adjunto não foi capaz de eliminar as anomalias já verificadas tais como a perda de unitariedade. Isto pode indicar que mesmo procedimentos frequentes, como a construção de um pacote de onda, pode exigir a observação de certas condições mais rígidas, sem as quais o comportamento do certas soluções pode ser profundamente afetado, conduzindo ao problema observado neste modelo e em outros. Neste sentido, o formalismo de Schutz não é necessariamente responsável por algum aspecto anômalo do operador que descreve o sistema quântico, embora seu uso possa cooperar para alterar o comportamento da função de onda durante o processo de obtenção do pacote de ondas. Uma outra hipótese, que encontra força na referência [112], é que a assinatura hiperbólica do termo cinético do operador Hamiltoniano associado ao modelo deve exigir um maior cuidado na análise espectral.

A métrica de Kantowski-Sachs tem sido utilizada para estudar os efeitos causados pela não-comutatividade [95, 105–108]. Neste cenário, isso é especialmente relevante, uma vez que esta métrica apresenta dois fatores de escala com respeito aos quais a não-comutatividade é imposta. Na referência [108] o estudo é realizado considerando que apenas os fatores de escala não comutam. Já na referência [106] a não-comutatividade é estabelecida entre os fatores de escala e entre os momentos a eles associados. Em ambos os trabalhos, é verificada que para uma faixa de valores do parâmetro de não-comutatividade, certos efeitos podem ser observados, fornecendo mais informações acerca da anisotropia apresentada no modelo. A deformação do espaço de fase aparece então como uma alternativa para a descrição de efeitos ou características apresentadas por sistemas quânticos a altas energias e parece ser um caminho natural no estudo das possíveis anomalias presen-

tes em modelos quânticos anisotrópicos. Além disso, recentemente, a Cosmologia quântica não-comutativa tem sido empregada até em modelos de FLRW com fluido de radiação descrito pelo formalismo de Schutz.

Uma outra perspectiva para trabalhos futuros, consiste na investigação de novos cenários contendo outros tipos de fluido (e eventualmente a combinação de mais que dois deles). Além disso, a possibilidade de que certas funções usadas na construção do pacote de ondas possam levar ao aparecimento de anomalias e resultados físicos inadequados deve ser investigada mais profundamente. Uma alternativa é comparar soluções baseadas em diferentes pacotes de onda. Outras perspectivas são a construção de modelos anisotrópicos com outros tipos de fluidos ou mesmo com a introdução de um segundo fluido, como feito no modelo isotrópico tratado no Capítulo 4, o que aumenta ainda mais o número de graus de liberdade do minissuperespaço. Isto pode permitir um entendimento mais completo da conexão entre matéria e geometria em diferentes cenários cosmológicos. Espera-se que isso ajude a esclarecer o papel dos graus de liberdade adicionados nos modelos cosmológicos, bem como contribuir para a discussão acerca dos procedimentos de quantização aplicados à Cosmologia.

# Apêndice A

## A Função Erro

A função erro  $\operatorname{erf} x$  é dada por [86]

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad . \quad (\text{A.1})$$

Há uma conexão direta entre a função erro com a função gaussiana e com a função gaussiana normalizada, as quais são escritas como

$$\begin{aligned} f(x) &= a e^{\frac{-(x-b)^2}{2\sigma^2}} , \\ g(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-b)^2}{2\sigma^2}} , \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

respectivamente, em que  $a, b$  são constantes e  $\sigma$  é o desvio padrão, algumas vezes chamado de largura gaussiana RMS. O gráfico de uma Gaussiana é uma curva simétrica característica em forma de sino com o parâmetro  $a$  sendo a altura do pico da curva,  $b$  é a posição do centro do pico e  $\sigma$  controla a largura do sino.

Com a substituição

$$\begin{aligned} t &= \frac{x-b}{\sqrt{2\sigma}} , \\ dt &= \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} dx , \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

é possível integrar a função gaussiana normalizada entre  $-x$  e  $+x$  e obter

$$\int_{-x}^{+x} g(x) dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \operatorname{erf} x \quad , \quad (\text{A.4})$$

Algumas propriedades e aproximações da função erro são elencadas abaixo:

$$\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf} x \quad , \quad (\text{A.5})$$

$$\operatorname{erf} 0 = 0 \quad , \quad (\text{A.6})$$

$$\operatorname{erf}(x^*) = (\operatorname{erf} x)^* \quad \text{em que } * \text{ denota conjugação complexa} \quad , \quad (\text{A.7})$$

$$\operatorname{erf} \infty = 1 \quad , \quad (\text{A.8})$$

$$\operatorname{erf}(-\infty) = -1 \quad , \quad (\text{A.9})$$

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} dt \quad \text{para } x \ll 1 \quad , \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{erf} x &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!} \quad , \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \dots \right) \quad \text{para } x \ll 1 \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\operatorname{erf} x = 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi} x} \left( 1 - \frac{1}{2x^2} - \dots \right) \quad \text{para } x \gg 1 \quad . \quad (\text{A.12})$$

A função erro complementar, habitualmente denotada como  $\operatorname{erfc} x$ , é definida como

$$\begin{aligned} \operatorname{erfc} x &= 1 - \operatorname{erf} x \quad , \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Alguns valores especiais, aproximações e resultados de  $\operatorname{erfc} x$  são

$$\operatorname{erfc}(-x) = 2 - \operatorname{erfc} x \quad , \quad (\text{A.14})$$

$$\operatorname{erfc} \infty = 0 \quad , \quad (\text{A.15})$$

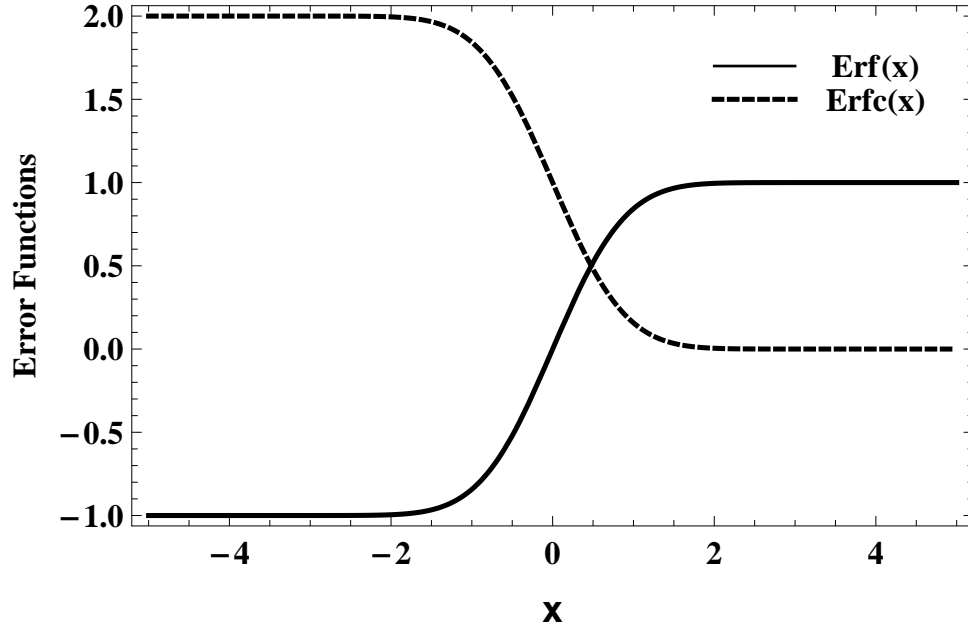
$$\operatorname{erfc}(-\infty) = 2 \quad , \quad (\text{A.16})$$

$$\operatorname{erfc} 0 = 1 \quad , \quad (\text{A.17})$$

$$\operatorname{erfc} x = \frac{\Gamma(1/2, x^2)}{\sqrt{\pi}} \quad , \text{ em que } \Gamma(a, y) \text{ é a função gama incompleta, } (\text{A.18})$$

$$\int_0^\infty \operatorname{erfc} x \, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad . \quad (\text{A.19})$$

Na figura (A.1) o comportamento das funções especiais tratadas neste apêndice é mostrado.



**Figura A.1:** A função erro e a função erro complementar.

## Apêndice B

# Aspectos elementares da termodinâmica de um fluido perfeito

Considere um fluido perfeito de uma componente composto por bárions, no sentido discutido por Fermi em seu livro [114]. Como os bárions podem sofrer transmutação, a massa dos bárions não é conservada. Entretanto, esta situação não ocorre com o número de bárions  $N$ . Então,  $m_H N$  é definido como a massa de repouso conservada em uma amostra de matéria contendo  $N$  bárions, em que  $m_H$  é a massa do átomo de Hidrogênio no estado fundamental. A diferença entre a massa total  $E$  e  $m_H N$  é chamada de energia interna<sup>1</sup> e é expressa como  $U$ . Denota-se por  $\rho_0$  a densidade de massa de repouso e por  $u = \frac{U}{m_H N}$  a energia interna específica, ambas medidas num sistema de referência momentaneamente em repouso no fluido. Isto torna possível escrever

$$U = E - m_H N \quad , \quad (\text{B.1})$$

tal que

$$\frac{E}{m_H N} = u + 1 \quad . \quad (\text{B.2})$$

---

<sup>1</sup>Em unidades tais que  $c = 1$ .

Agora, dividindo o resultado anterior pelo volume da amostra que contém  $N$  bárions, pode-se escrever (B.2) como

$$\rho = \rho_0(1 + u) \quad . \quad (\text{B.3})$$

em que  $\rho$  é a densidade de energia.

Utiliza-se a equação de estado escrita sob a forma  $p = p(\rho, u)$ . A primeira lei da termodinâmica é escrita como

$$dW = dU + pdV \quad .$$

Dividindo a equação acima por  $m_H N$  tem-se que

$$dw = du + pd\left(\frac{1}{\rho_0}\right) \quad , \quad (\text{B.4})$$

em que  $dw$  é a quantidade de energia por unidade de massa de repouso, adicionada ao fluido num processo quasi-estático.

Como a equação de estado depende de duas variáveis, o teorema de Pfaff assegura a existência de funções como a entropia específica  $s(\rho_0, u)$  e a temperatura  $T(\rho_0, u)$ , tal que

$$du + pd\left(\frac{1}{\rho_0}\right) = Tds \quad . \quad (\text{B.5})$$

Então, define-se a massa inercial (entalpia)<sup>2</sup> como

$$\mu = \frac{\rho + p}{\rho_0} = 1 + u + \frac{p}{\rho_0} \quad , \quad (\text{B.6})$$

em que a quantidade  $(\rho + p)$  se comporta como massa inercial por unidade de volume de um fluido perfeito. Com isso, pode-se utilizar  $d\mu$  para eliminar  $du$  em (B.5), a qual permite obter

$$dp = \rho_0 d\mu - \rho_0 T ds \quad , \quad (\text{B.7})$$

a partir do que pode-se observar a possibilidade de expressar  $\rho_0$  e  $u$  como funções de  $\mu$  e  $s$  tal que a equação de estado toma a forma  $p = p(\mu, s)$ . Para a equação barotrópica de

---

<sup>2</sup>Como definida e discutida na referência [42].

estado  $p = \alpha \rho$ , em que  $\alpha$  é uma constante, é possível escrever após algumas manipulações algébricas a seguinte relação

$$(1+u)d[\ln(1+u) - \alpha \ln \rho_0] = du + pd \left( \frac{1}{\rho_0} \right) = T ds \quad .$$

Disto, segue-se que

$$T = 1 + u \quad ,$$

e

$$s = \ln(1+u) - \alpha \ln \rho_0 \quad .$$

A última equação pode ser reescrita como

$$\rho_0 = (1+u)^{\frac{1}{\alpha}} e^{-\frac{s}{\alpha}} \quad . \quad (\text{B.8})$$

Além disso, da equação (B.6), obtém-se

$$(1+u) = \frac{\mu}{\alpha+1} \quad .$$

Substituindo a equação anterior em (B.8), é possível escrever

$$\rho_0 = \left( \frac{\mu}{\alpha+1} \right)^{\frac{1}{\alpha}} e^{-\frac{s}{\alpha}} \quad ,$$

mas

$$\rho = \rho_0(1+u) = \rho_0 \frac{\mu}{\alpha+1} = \left( \frac{\mu}{\alpha+1} \right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} e^{-\frac{s}{\alpha}} \quad , \quad (\text{B.9})$$

e finalmente,

$$p = \alpha \left( \frac{\mu}{\alpha+1} \right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} e^{-\frac{s}{\alpha}} \quad . \quad (\text{B.10})$$

Na expressão acima, a pressão do fluido pode ser expressa diretamente em termos de sua entalpia.



# Referências Bibliográficas

- [1] B. S. DeWitt, Phys. Rev. 160 (1967).
- [2] J. A. Wheeler, Battelle Recontres, C. DeWitt, J. A. Wheeler (eds), Benjamin New York (1968).
- [3] C. W. Misner, Phys. Rev. 186 (1969).
- [4] J.J Halliwell, *Quantum Cosmology and Baby Universes*, S. Coleman, J. B. Hartle, S.T. Piran and S. Weinberg (eds), World Scientific Singapore (1991).
- [5] D. L. Wiltshire, *An Introduction to Quantum Cosmology*, B. Robson, N. Visvanathan and W. S. Woolcock (eds) Cosmology: the Physics of the Universe, World Scientific Singapore (1996).
- [6] D. Atkatz, Am. J. Phys. 62, 619 (1994).
- [7] M. Bojowald, *Canonical gravity and applications: cosmology, black holes, and quantum gravity*, Cambridge University Press (2011).
- [8] Thomas Thiemann, Quantum Gravity (2003).
- [9] M. Bojowald, Phys. Rev. Lett. 86 (2001).
- [10] A. Ashtekar, M. Bojowald, J. Lewandowski, Adv. Theor. Math. Phys. 7 N. 2 (2003).
- [11] Carlo Rovelli, *Quantum Gravity*, Cambridge University Press (2010).

- [12] G. A. Monerat, G. Oliveira-Neto, E. V. Corrêa Silva, L. G. Ferreira Filho, P. Romildo Jr., J. C. Fabris, R. Fracalossi, F. G. Alvarenga and S. V. B. Gonçalves, Phys. Rev. D, 76 (2007).
- [13] E. Witten, Nucl. Phys. B, 443:25 (1995).
- [14] R. Jackiw, Nucl. Phys. B 252:343 (1985).
- [15] R. Arnowitt, S. Deser e C. W. Misner, em L. Witten, ed., *Gravitation: An Introduction to Current Research*, Wiley, New York (1962).
- [16] T. Thiemann, gr-qc/0110034 v1 (2001).
- [17] Alejandro Corichi e Darão Núñez, Revista Mexicana de Física, 37 N.4 (1991).
- [18] C. Simeone, *Deparametrization and Path Integral Quantization of Cosmological Models*, World Scientific Lecture Notes in Physics, 69, 1 (2002).
- [19] T. P. Shestakova, Grav. Cosmol., 10, 257 (2004).
- [20] Alvarenga, F. G.; Fracalossi, R.; Furtado, R. G.; Gonçalves, S. V. B., Brazilian Journal of Physics, 47 (2017).
- [21] Alvarenga, F.G., Fracalossi, R., Freitas, R.C., Gonçalves, S. V. B., Gen Relativ Gravit (2017) 49:136 (2017).
- [22] Alvarenga, F. G.; Fracalossi, R.; Freitas, R. C.; Gonçalves, S. V. B., Brazilian Journal of Physics, 48 N. 4 (2017).
- [23] F. G. Alvarenga, A. B. Batista, J. C. Fabris, S. V. B. Gonçalves, Gen. Rel. Grav. 35, 1659 (2003).
- [24] Einstein, Albert, Annalen der Physik. 49 (7): 769-822 (1916).
- [25] F. W. Dyson, A. S. Eddington, and C. Davidson, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. CCXX-A 579: 291-333. (1920).

- [26] Andrew Liddle, *An Introduction to Modern Cosmology*, 2nd ed. John Wiley and Sons (2003).
- [27] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics Second Edition: Volume 6 (Course of Theoretical Physics S)* 2nd Edition, Butterworth-Heinemann (1987).
- [28] A. Clebsch, J. Rieme Agnew, Math. 56,1 (1859).
- [29] R. L. Seliger e G. B. Whitham, Proc. roy. Soc. (London) A305, 1 (1968).
- [30] A. Einstein, *Kosmologisch betrachtungen zur allgemeinen relativitätstheorie*, traduzido para o inglês em H. A. Lorentz *et al.*, *The Principle of Relativity*, Dover, New York (1952).
- [31] R. Kantowski, R. K. Sachs, J. Math. Phys. 7, 443 (1966).
- [32] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Dover Edition (2001).
- [33] D. M. Gitman e I.V. Tyutin, *Quantization of Fields with Constraints*, Springer-Verlag (1990).
- [34] M. Henneaux e C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press (1992).
- [35] N. A. Lemos, *Mecânica Analítica*, Editora Livraria da Física (2004).
- [36] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morete, Margaret Dillard Bleick, *Analysis, Manifolds and Physics Part I: Basics*, N. H. Elsevier (1996).
- [37] César Camacho, Alcides Lins Neto, *Teoria Geométrica das Folheações*, IMPA (1979).
- [38] R. M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press (1984).
- [39] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, Franck Laloë, *Mécanic quantique I*, Hermann Éditeurs des Sciences et des arts (1973).

- [40] Giulini, D. *Gen Relativ Gravit* 41: 785 (2009).
- [41] N. A. Lemos, *Convite à Física Matemática*, Editora Livraria da Física, São Paulo (2013).
- [42] B.F. Schutz, *Phys. Rev. D* 2, 2762 (1970).
- [43] B.F. Schutz, *Phys. Rev. D* 4, 3559(1971).
- [44] J. W. Herivel, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 51, 344 (1955).
- [45] C. C. Lin C. C., *Liquid Helium*, in *Proc. Int. School Phys. XXI*, Academic Press (1963).
- [46] W. Van Sarloos, D. Bedeaux and P. Mazur, *Physica* 107A, 109 (1981).
- [47] L. Smarr and C. Taubes, *General Relativistic Hydrodynamics: The Comoving, Eulerian, and Velocity Potential Formalisms*, in *Essays in General Relativity - A Festschrift for Abraham Taub*, edited by Frank J. Tipler, Academic Press (1980).
- [48] F. T. Falciano, *Quantização do Modelo de Minissuperespaço de Friedmann-Robertson-Walker Permeado por Poeira e Radiação via Interpretação Causal da Mecânica Quântica*, Dissertação de Mestrado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (2004).
- [49] F.G. Alvarenga and N.A. Lemos, *Gen. Rel. Grav.* 30, 681(1998).
- [50] F.G. Alvarenga, J.C. Fabris, N.A. Lemos and G.A. Monerat, *Gen. Rel. Grav.* 34, 651 (2002).
- [51] G. A. Monerat, E. V. Corrêa Silva, C. Neves, L. G. Ferreira Filho, in *Proceedings of the 8th Friedmann Seminar*, ed. by V. M. Mostepanenko, M. Novello. (Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser. 3, Rio de Janeiro (2011)).
- [52] P. Hořava, *Phys. Rev. D* 79, 084008 (2009).
- [53] E. N. Saridakis, *Int. J. Mod. Phys. D* 20, 1485 (2011).

- [54] A. E. Bernardini, P. Leal and O. Bertolami, JCAP 02, 025 (2018).
- [55] T. P. Sotiriou, M. Visser and Silke Weinfurtner, JHEP 0910:033 (2009).
- [56] Wang, Anzhong Int.J.Mod.Phys. D26 (2017).
- [57] Mukohyama, Shinji Class.Quant.Grav. 27 (2010).
- [58] ATLAS Collaboration, Phys. Lett. B 716 (2012).
- [59] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), Phys. Rev. Lett. 116 (2016).
- [60] O. Bertolami e C. A. D. Zarro, Phys. Rev. D 84 (2011).
- [61] K. Maeda, Y. Misonoh e T. Kobayashi,, Phys. Rev D 82 (2010).
- [62] G. de O. Neto, L. G. Martins, G. A. Monerat e E. V. C. Silv, Modern Physics Letters A, 33 N.1850014-1 (2017).
- [63] G Calcagni, JHEP 0909:112 (2009).
- [64] A. H. Guth, Phys. Rev. D 23, 347 (1981).
- [65] K. Sato, Mon. Not. R. Astron. Soc. 195, 467 (1981); Phys. Lett. 99B, 66 (1981).
- [66] Shinji Tsujikawa, *Introductory Review of Cosmic Inflation*, arXiv:hep-ph/0304257 (2003).
- [67] Gianluca Calcagni, Ann. Phys. (Berlin) 525, No.5 (2013).
- [68] Dolgov, A. D. Nucl. Phys. Proc. Suppl. (2002): 137-43. ArXiv. 17 Jan. 2002. Web. 14 Jan. (2013).
- [69] Ya. B. Zeldovich, Zh. Eksp. Sov. Phys. JETP 14, 1143 (1962)
- [70] Y. B. Zeldovich, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 160 (1972).
- [71] M. Kamionkowski and M.S. Turner, Phys. Rev. D 42 3310 (1990).

- [72] B. Spokoiny, Phys. Lett. B 315 (1993).
- [73] M. Joyce and T. Prokopec, Phys. Rev. D 57 (1998).
- [74] M. Joyce, Phys. Rev. B 55 (1997).
- [75] P. Salati, Phys. Lett. B 571, 121 (2003).
- [76] C. Pallis, Nucl. Phys. B 751, 129 (2006).
- [77] V. Sahni, M. Sami e T. Souradeep, Phys. Rev. D 65 (2001)
- [78] M. Giovannini, Phys. Rev. D 58 (1998).
- [79] M. E. Gomez, S. Lola, C. Pallis, and J. Rodriguez-Quintero, JCAP 01, 027 (2009).
- [80] R. Colistete, Jr., J. C. Fabris e N. Pinto-Neto, Phys. Rev. D 62 (2000).
- [81] F. T. Falciano, N. Pinto-Neto e E. S. Santini, Phys. Rev. D 76 (2007).
- [82] C. Neves *et al*, Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser. 03, 324 (2011).
- [83] S. D. Odintsov, V. K. Oikonomou, Phys. Rev. D 96 (2017).
- [84] Alvarenga, F.G., Fractalossi, R., Freitas, R.C., Gonçalves S. V. B., Gen Relativ Gravit 49 (2017).
- [85] P. Hajicek, Phys. Rev. D 34, 1040 (1986).
- [86] M. Abramowitz and I. A. Stegun (eds.), *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, 9th printing. New York: Dover (1972).
- [87] T. Christoudoulakis and C. G. Papadopoulos, Phys. Rev. D 38, 4 (1988).
- [88] E. Anderson, in *Classical and Quantum Gravity: Theory, Analysis and Applications*, ed. by V. R. Frignanni. (2012).
- [89] C. J. Isham, Lect. Notes Phys. 434, 150 (1994).

- [90] Magain, P., Hauret, C., <http://arxiv.org/abs/arXiv:1505.02052> (2016).
- [91] G. F. R. Ellis, H. van Elst, in *Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Theoretical and Observational Cosmology, Cargèse, France, August 17-29*. Kluwer Academic, Boston (1999).
- [92] B. L. Hu, J. P. Paz, S. Sinha, in *Proceedings of a Symposium on Directions in General Relativity, College Park, May 1993*, vol. 1., ed. by B. L. Hu, M. P. Ryan, C. V. Vishveshwara, Cambridge University Press (1993).
- [93] H. D. Conradi, *Class. Quant. Grav.* 12, 2423 (1995).
- [94] C. Simeone, *Gen. Rel. Grav.* 34, 1887 (2002).
- [95] G. D. Barbosa, N. Pinto-Neto, *Phys. Rev. D* 70, 103512 (2004).
- [96] G. A. Mena Marugan, *Phys. Rev. D* 50, 3923 (1994).
- [97] M. J. Gotay, J. Demaret, *Phys. Rev. D* 28, 2402 (1983).
- [98] V. G. Lapchinsky, V. A. Rubakov, *Model. Teor. Mat. Fiz.* 33, 364 (1977).
- [99] F. G. Alvarenga, N. A. Lemos, *Gen. Rel. Grav.* 30, 681 (1998).
- [100] J. Acacio de Barros, N. Pinto-Neto and M. A. Sagioro-Leal, *Phys. Lett. A* 241, 229 (1998).
- [101] F. G. Alvarenga, J. C. Fabris, N. A. Lemos, G. A. Monerat, *Gen. Rel. Grav.* 34, 651 (2002).
- [102] C. Callan, S. Giddings, J. Harvey, A. Strominger, *Phys. Rev. D* 45, 1005 (1992).
- [103] C. B. Collins, *J. Math. Phys.*, 18, No.11 (1977).
- [104] M. P. Ryan and L. C. Shepley L C *Homogeneous Relativistic Cosmologies*, Princeton Series in Physics, Princeton University Press, New Jersey (1975).
- [105] A. E. Bernardini, O. Bertolami, <http://lanl.arxiv.org/abs/1710.01172> (2017).

- [106] C. Bastos , O. Bertolami, N. C. Dias e J. N. Prata, Phys. Rev. D 78, 023516 (2008).
- [107] O. Obregón e J. A. Preciado, Phys. Rev. D 86, 063502 (2012).
- [108] H. García-Compeán, O. Obregón e C. Ramírez, Phys. Rev. Lett. 88, 161301 (2008).
- [109] G. de O. Neto, M. S. de Oliveira, G. A. Monerat e E. V. C. Silva, Int. J. Mod. Phys. D 26, 1750011 (2017).
- [110] G. A. Monerat, E. V. C. Silva, C. Neves, G. de O. Neto e L. G. R. Rodrigues, Int. J. Mod. Phys. D 26, 1750022 (2017).
- [111] N. A. Lemos, Phys. Rev. D 53, 4275 (1996).
- [112] Sridip Pal, Class. Quantum Grav. 33, 045007 (2016).
- [113] Sridip Pal<sup>1</sup> and Narayan Banerjee, Class. Quantum Grav. 32, No.20 (2015).
- [114] E. Fermi, *Thermodynamics*, Dover, New York (1936).